Quels outils mathématiques permettent de quantifier la notion d'auto-similarité dans les sciences en général, et particulièrement pour l'analyse de données urbaines?

Stéphane Jaffard

Université Paris Est Créteil

(avec beaucoup d'emprunts
à Pierre Frankhauser)

Mathématiques et Informatique pour la Ville

Labex Bézout 30 mai 2022

Quelques villes

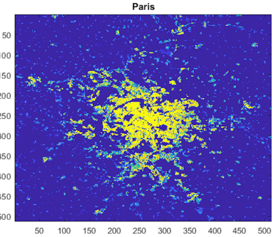
Berlin

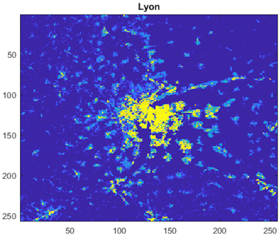
Montbeliard

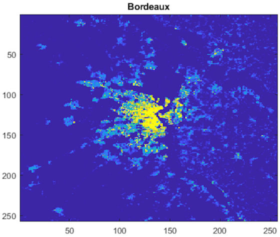
Quelques villes

Berlin

Montbeliard







Quelques questions

- Comment caractériser ce type de géométrie ?
- Quels types de modèles conviennent ?
- Quels paramètres sont attachés à ces modèles ?
- Peut-on utiliser ces paramètres pour effectuer des classifications ?
- Qu'est-ce que ces outils de classification permettent de dire sur les villes étudiées ?

Fonctions partout irrégulières

Un problème central en analyse au 19eme siècle a été de déterminer si une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est nécessairement dérivable en certains points

Une première réponse négative a été obtenue par B. Bolzano en 1830 mais n'a pas été connue

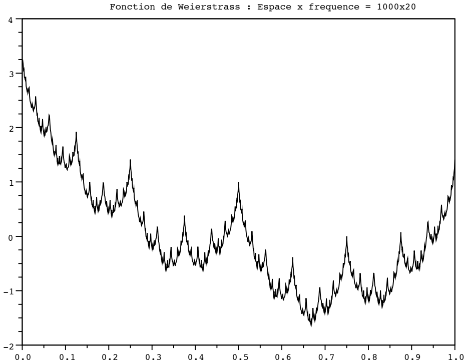
Fonctions partout irrégulières

Un problème central en analyse au 19eme siècle a été de déterminer si une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est nécessairement dérivable en certains points

Une première réponse négative a été obtenue par B. Bolzano en 1830 mais n'a pas été connue

Un second contre-exemple dû à K. Weierstrass a clos le problème en 1872

Fonctions de Weierstrass



Fonction de Weierstrass

$$W_H(x) = \sum_{j \geq 0} 2^{-Hj} \sin(2^j x) \qquad 0 < H < 1$$

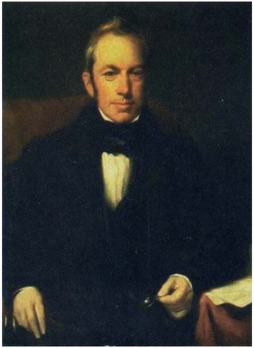
Exemple de fonction continue nulle part dérivable

Fonctions partout irrégulières

En 1893, Charles Hermite écrit
à Thomas Stieltjes :
*Je me détourne avec effroi
et horreur de cette plaie
lamentable des fonctions
continues qui sont sans dérivée*

Fonctions partout irrégulières

En 1893, Charles Hermite écrit
à Thomas Stieltjes :
Je me détourne avec effroi
et horreur de cette plaie
lamentable des fonctions
continues qui sont sans dérivée



En 1827, Robert Brown observe les
mouvements erratiques d'un colloïde
à la surface d'un liquide.
La trajectoire d'une telle particule change
de direction à tout moment, quelle que soit
l'échelle à laquelle on l'observe, suggérant
une fonction continue nulle part dérivable

Fonctions partout irrégulières

En 1913, Jean Perrin, dans son ouvrage *Les atomes*, écrit : *Si les fonctions à dérivée sont les plus simples, les plus faciles à traiter, elles sont pourtant l'exception ; ou, si l'on préfère un langage géométrique, les courbes qui n'ont pas de tangente sont la règle, et les courbes bien régulières, telles que le cercle, sont des cas fort intéressants, mais très particuliers [...] Et, le plus souvent, ceux auxquels on parle de courbes sans tangentes ou de fonctions sans dérivées commencent par penser qu'évidemment la nature ne présente pas de telles complications, et n'en suggère pas l'idée. C'est pourtant le contraire qui est vrai. Observons, par exemples un de ces flocons blancs qu'on obtient en salant de l'eau de savon. De loin, son contour peut sembler net, mais sitôt qu'on s'approche un peu, cette netteté s'évanouit. [...]*

Fonctions partout irrégulières

Si l'on prend une loupe, un microscope, l'incertitude reste aussi grande car, chaque fois qu'on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles sans jamais éprouver l'impression nette et reposante que donne, par exemple, une bille d'acier poli. En sorte que, si cette bille donne une image utile de la continuité classique, notre flocon peut tout aussi logiquement suggérer la notion plus générale des fonctions continues sans dérivées.

Fonctions partout irrégulières

Si l'on prend une loupe, un microscope, l'incertitude reste aussi grande car, chaque fois qu'on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles sans jamais éprouver l'impression nette et reposante que donne, par exemple, une bille d'acier poli. En sorte que, si cette bille donne une image utile de la continuité classique, notre flocon peut tout aussi logiquement suggérer la notion plus générale des fonctions continues sans dérivées.

Les fonctions continues nulle part dérivables ne cesseront d'être des curiosités bizarres pour les mathématiciens que lorsque Banach et Mazurkiewicz montreront en 1931 que c'est le cas de "la plupart" des fonctions continues

Comment mesurer des longueurs ou des surfaces ?

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, la longueur

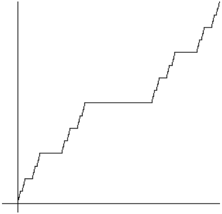
de son graphe sur l'intervalle $[a, b]$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

Comment mesurer des longueurs ou des surfaces ?

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, la longueur de son graphe sur l'intervalle $[a, b]$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$



Comment définir une longueur si f n'est pas dérivable ?

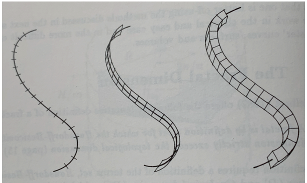
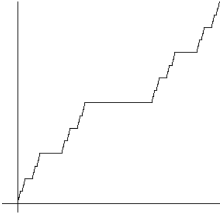


FIGURE 2.5: Measuring the 'size' of curves.

Comment mesurer des longueurs ou des surfaces ?

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, la longueur de son graphe sur l'intervalle $[a, b]$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$



Comment définir une longueur si f n'est pas dérivable ?

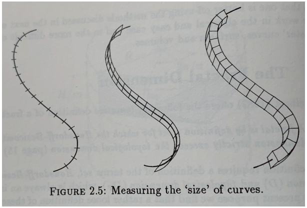


FIGURE 2.5: Measuring the 'size' of curves.

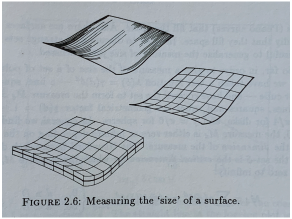


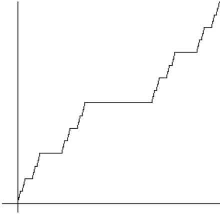
FIGURE 2.6: Measuring the 'size' of a surface.

Crédit : Jens Feder "Fractals"

Comment mesurer des longueurs ou des surfaces ?

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable, la longueur de son graphe sur l'intervalle $[a, b]$ est

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$



Comment définir une longueur si f n'est pas dérivable ?

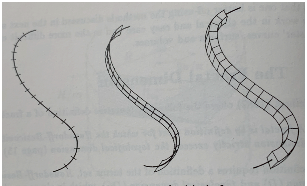


FIGURE 2.5: Measuring the 'size' of curves.

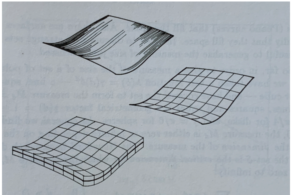
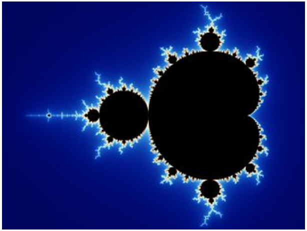


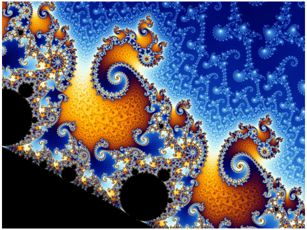
FIGURE 2.6: Measuring the 'size' of a surface.

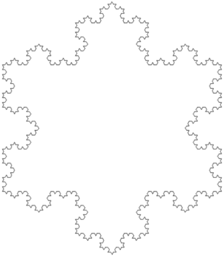
Crédit : Jens Feder "Fractals"

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de cubes de largeur ε nécessaire pour recouvrir l'ensemble A : $N(\varepsilon) \sim C\, \varepsilon^{-dim(A)}$

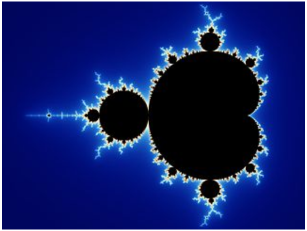
La géometrie fractale

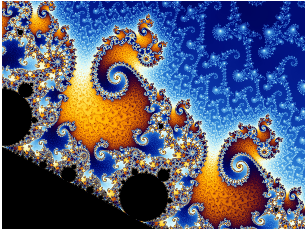


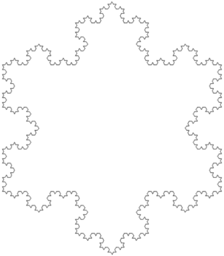




La géometrie fractale





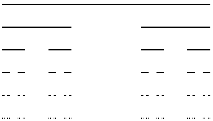


Outils de quantification :

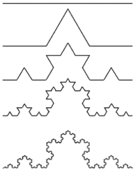
exposants d'autosimilarité

Dimensions fractionnaires

Ensembles autosimilaires



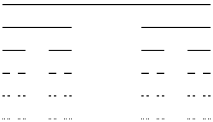
Ensemble triadique de Cantor



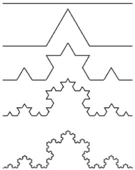
Courbe de Van Koch

On peut découper ces ensembles en 2 (resp. 4) parties semblables au tout

Ensembles autosimilaires



Ensemble triadique de Cantor

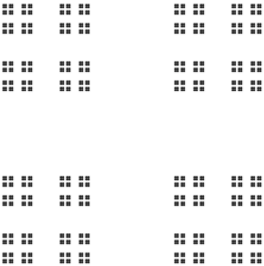


Courbe de Van Koch

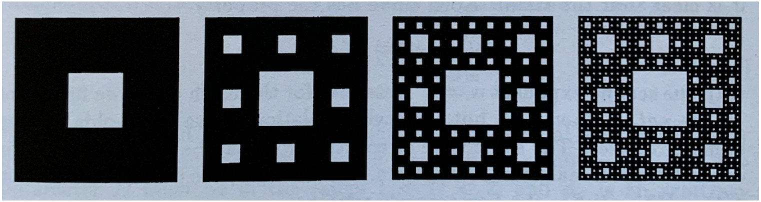
On peut découper ces ensembles en 2 (resp. 4) parties semblables au tout

Poussière

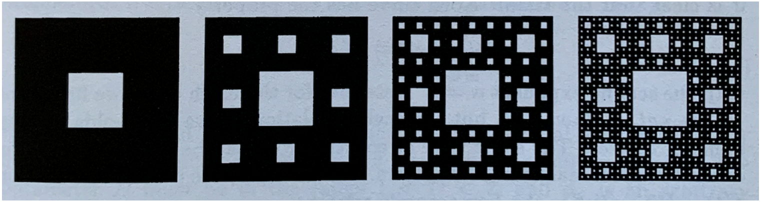
de Cantor

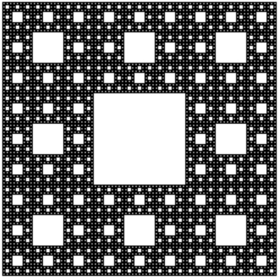


Tapis de Sierpinski

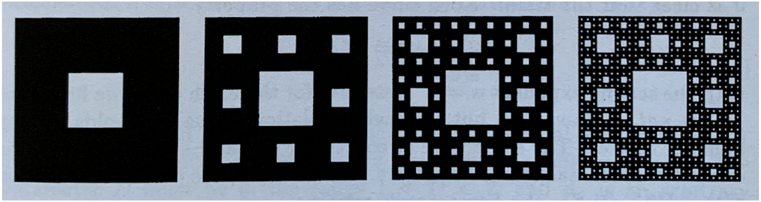


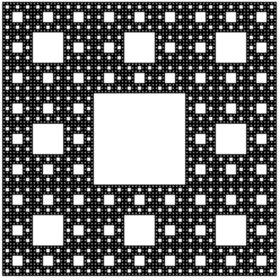
Tapis de Sierpinski

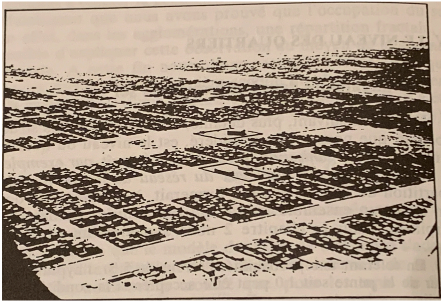




Tapis de Sierpinski

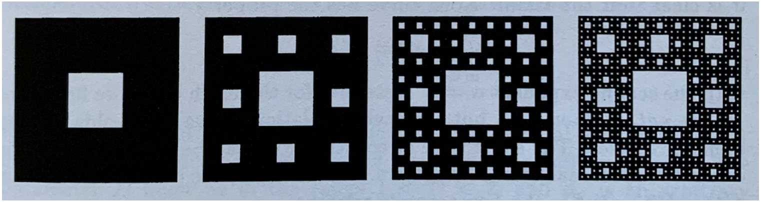


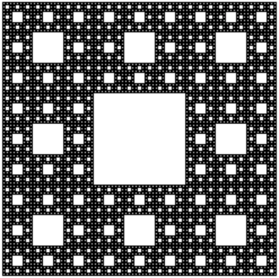




Vue aérienne de Khartoum

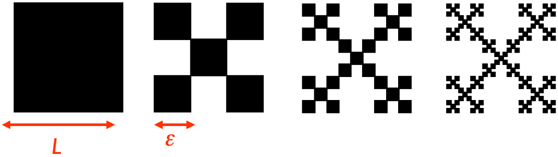
Tapis de Sierpinski



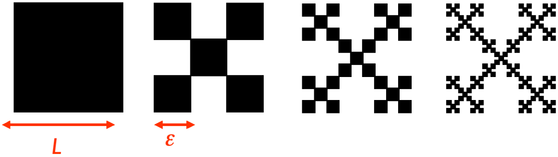


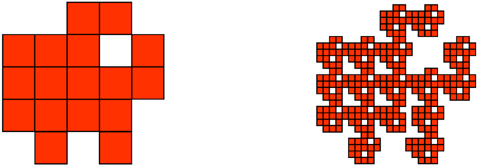
Bâtiment Coriolis, ENPC

Ensembles autosimilaires 2D

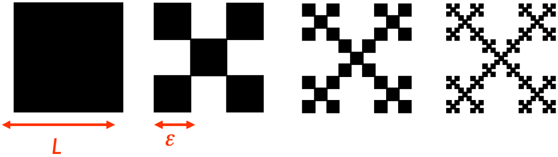


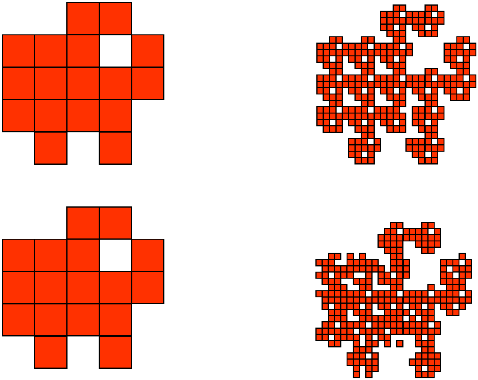
Ensembles autosimilaires 2D



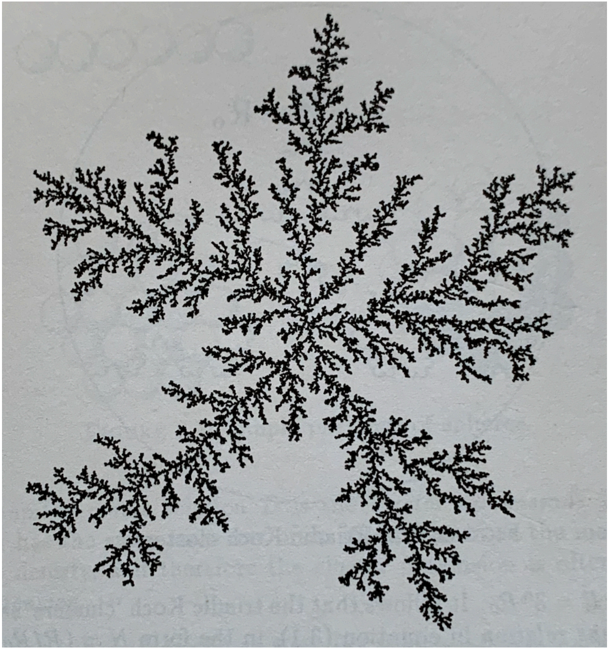


Ensembles autosimilaires 2D





DLA



Paramètres pour l'analyse d'ensembles fractals

L'autosimilarité exacte ne concerne que des ensembles mathématiques très particuliers

Paramètres pour l'analyse d'ensembles fractals

L'autosimilarité exacte ne concerne que des ensembles mathématiques très particuliers

Dimension de boîte

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir l'ensemble A

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-dim_B(A)}$$

Paramètres pour l'analyse d'ensembles fractals

L'autosimilarité exacte ne concerne que des ensembles mathématiques très particuliers

Dimension de boîte

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir l'ensemble A

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-dim_B(A)}$$

Avantage : Calculable sur des données expérimentales par régressions log-log en fonction du paramètre d'échelle ε

Paramètres pour l'analyse d'ensembles fractals

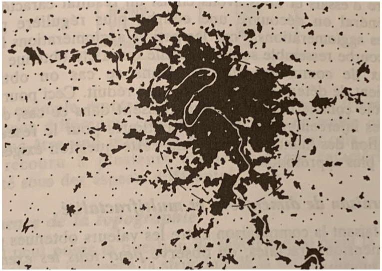
L'autosimilarité exacte ne concerne que des ensembles mathématiques très particuliers

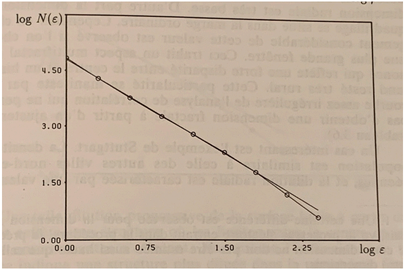
Dimension de boîte

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir l'ensemble A

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-dim_B(A)}$$

Avantage : Calculable sur des données expérimentales par régressions log-log en fonction du paramètre d'échelle ε

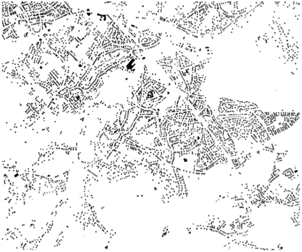


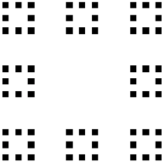


Pierre Frankhauser : "La fractalité des structures urbaines"

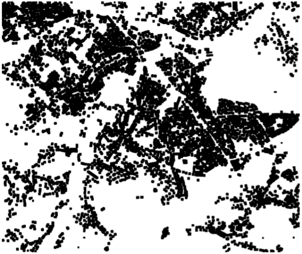
Au delà de l'autosimilarité

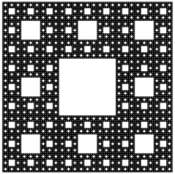
Rixensart



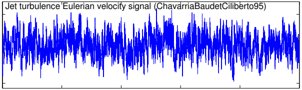


Zoom

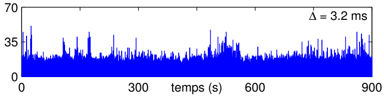




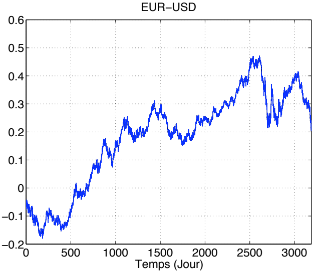
Analyse multifractale : Motivation



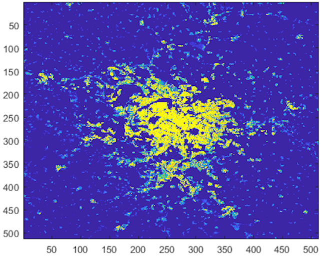
Turbulence pleinement développée



Traffic internet



Euro / Dollar (2001-2009)



Population IdF

Caractéristique commune : signaux partout irréguliers

But de l’analyse multifractale :

Introduire des paramètres permettant de mesurer cette irrégularité et de l’utiliser pour la classification et la sélection de modèles

But de l'analyse multifractale :

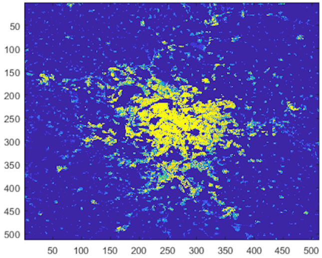
Introduire des paramètres permettant de mesurer cette irrégularité et de l'utiliser pour la classification et la sélection de modèles

Les signaux et images sont modélisés par des processus, des mesures ou des champs aléatoires

Cahier des charges pour les quantités qui seront introduites :

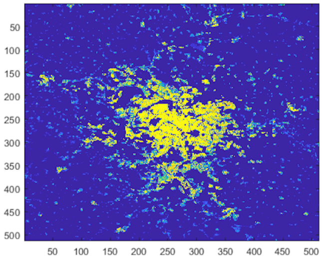
- Effectivement calculables sur des données numériques (régressions log-log)
- Dans le cas de processus aléatoires : Dans la limite des petites échelles, elles convergent vers des quantités déterministes caractéristiques des paramètres pour des classes générales de modèles

Population : quel cadre mathématique ?

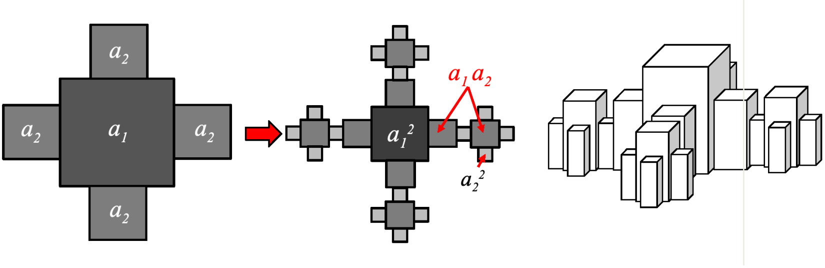


Population de l'Ile de France

Population : quel cadre mathématique ?



Population de l'Ile de France



Mesures multiplicatives

Fonction d'échelle de Kolmogorov (1941)

Si f est une *fonction* bornée, la fonction d'échelle de Kolmogorov $\zeta_f(p)$ est définie par :

$$\forall p \geq 1, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } \delta \to 0$$

(régression log-log)

Fonction d'échelle de Kolmogorov (1941)

Si f est une *fonction* bornée, la fonction d'échelle de Kolmogorov $\zeta_f(p)$ est définie par :

$$\forall p \geq 1, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } \delta \to 0$$

(régression log-log)

Interprétation fonctionnelle de la fonction d'échelle :

Espaces de Lipschitz : Soit $p \in [1, \infty)$; $f \in Lip\,(s, L^p)$ si

$$\exists C > 0,\ \forall \delta > 0, \qquad \| f(\cdot + \delta) - f(\cdot) \|_p \leq C \cdot |\delta|^s$$

Fonction d'échelle de Kolmogorov (1941)

Si f est une *fonction* bornée, la fonction d'échelle de Kolmogorov $\zeta_f(p)$ est définie par :

$$\forall p \geq 1, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } \delta \to 0$$

(régression log-log)

Interprétation fonctionnelle de la fonction d'échelle :

Espaces de Lipschitz : Soit $p \in [1, \infty)$; $f \in Lip\,(s, L^p)$ si

$$\exists C > 0,\ \forall \delta > 0, \qquad \| \ f(\cdot + \delta) - f(\cdot) \ \|_p \leq C \cdot |\delta|^s$$

$$\text{Donc} \qquad \forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C \cdot |\delta|^{ps}$$

Fonction d'échelle de Kolmogorov (1941)

Si f est une *fonction* bornée, la fonction d'échelle de Kolmogorov $\zeta_f(p)$ est définie par :

$$\forall p \geq 1, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } \delta \to 0$$

(régression log-log)

Interprétation fonctionnelle de la fonction d'échelle :

Espaces de Lipschitz : Soit $p \in [1, \infty)$; $f \in Lip\,(s, L^p)$ si

$$\exists C > 0,\ \forall \delta > 0, \qquad \| f(\cdot + \delta) - f(\cdot) \|_p \leq C \cdot |\delta|^s$$

$$\text{Donc} \qquad \forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C \cdot |\delta|^{ps}$$

$$\forall p \geq 1, \qquad \zeta_f(p) = p \cdot \sup \{ s : f \in Lip\,(s, L^p) \}$$

Interprétation : $f \in Lip\,(s, L^p)$ est “proche” de signifier que $f \in L^p$ et que sa dérivée fractionnaire d'ordre s, $f^{(s)} \in L^p$

Fonction d'échelle de Kolmogorov (1941)

Si f est une *fonction* bornée, la fonction d'échelle de Kolmogorov $\zeta_f(p)$ est définie par :

$$\forall p \geq 1, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \sim |\delta|^{\zeta_f(p)} \quad \text{quand } \delta \to 0$$

(régression log-log)

Interprétation fonctionnelle de la fonction d'échelle :

Espaces de Lipschitz : Soit $p \in [1, \infty)$; $f \in Lip\,(s, L^p)$ si

$$\exists C > 0, \ \forall \delta > 0, \qquad \| \ f(\cdot + \delta) - f(\cdot) \ \|_p \leq C \cdot |\delta|^s$$

$$\text{Donc} \qquad \forall \delta > 0, \qquad \int |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq C \cdot |\delta|^{ps}$$

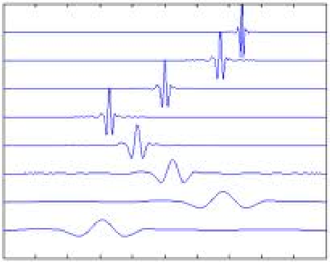
$$\forall p \geq 1, \qquad \zeta_f(p) = p \cdot \sup \{ s : f \in Lip\,(s, L^p) \}$$

Interprétation : $f \in Lip\,(s, L^p)$ est “proche” de signifier que $f \in L^p$ et que sa dérivée fractionnaire d'ordre s, $f^{(s)} \in L^p$

La fonction d'échelle fournit un indice de régularité globale en norme L^p

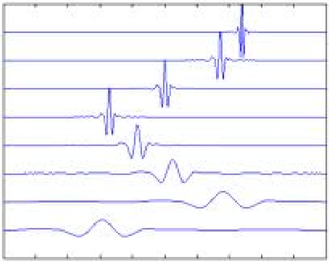
Base d'ondelettes en une variable

Une base d'ondelettes sur $\mathbb{R}$ est engendrée par une fonction régulière, bien localisée, oscillante, ψ telle que les $2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$



Base d'ondelettes en une variable

Une base d'ondelettes sur $\mathbb{R}$ est engendrée par une fonction régulière, bien localisée, oscillante, ψ telle que les $2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$



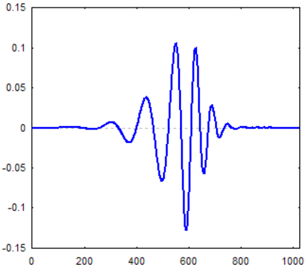
$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\ \psi(2^j x - k)$$

avec

$$c_{j,k} = 2^j \int f(x)\ \psi(2^j x - k)\ dx$$

Attention : les coefficients ne sont pas normalisé L^2



Ondelette de Daubechies

Crédit à : http ://www.kfs.oeaw.ac.at/content/blogcategory/0/502/lang,8859-1/

Coefficients d'ondelette de fonctions autosimilaires :

Cas deterministe

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot

$$W_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^j x)$$

Coefficients d'ondelette de fonctions autosimilaires :

Cas deterministe

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot

$$W_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^j x)$$

Autosimilarité exacte :

$$W_\alpha(2x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^{j+1} x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha(l-1)} \sin(2^l x) = 2^\alpha W_\alpha(x)$$

$$C_{j,k} = \int W_\alpha(x)\, 2^j \psi(2^j x - k) dx = 2^{-\alpha}\ C_{j-1,k}$$

Coefficients d'ondelette de fonctions autosimilaires :

Cas deterministe

Fonction de Weierstrass-Mandelbrot

$$W_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^j x)$$

Autosimilarité exacte :

$$W_\alpha(2x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha j} \sin(2^{j+1} x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\alpha(l-1)} \sin(2^l x) = 2^\alpha W_\alpha(x)$$

$$C_{j,k} = \int W_\alpha(x)\, 2^j \psi(2^j x - k) dx = 2^{-\alpha}\ C_{j-1,k}$$

L'autosimilarité de la fonction se traduit en une loi d'échelle exacte sur les coefficients d'ondelette

Ondelettes en 2 variables

En 2D, les ondelettes utilisées sont des produits tensoriels

$$\psi^1(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$$

$$\psi^2(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$$

$$\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

Ondelettes en 2 variables

En 2D, les ondelettes utilisées sont des produits tensoriels

$$\psi^1(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$$

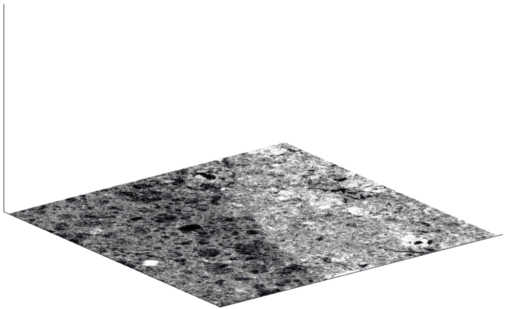
$$\psi^2(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$$

$$\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

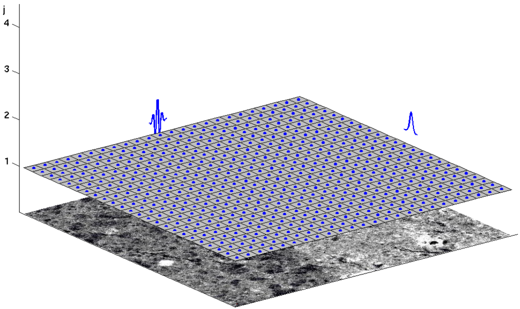
Coefficients d'ondelette

$$c^i_{j,k} = 2^{2j} \int\int f(x,y)\,\psi^i\left(2^j x - k, 2^j y - l\right)\,dx\,dy$$

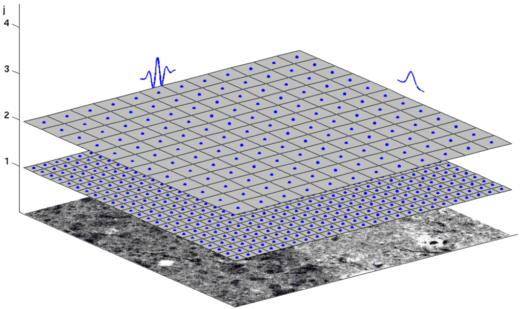
Calcul de coefficients d’ondelette en 2D



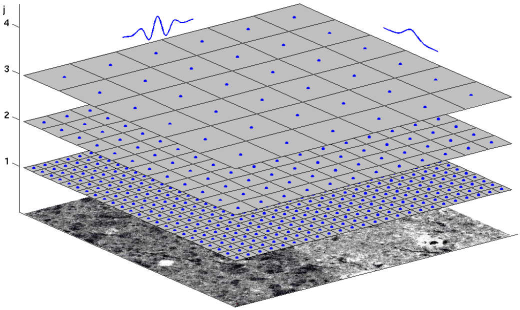
Calcul de coefficients d'ondelette en 2D



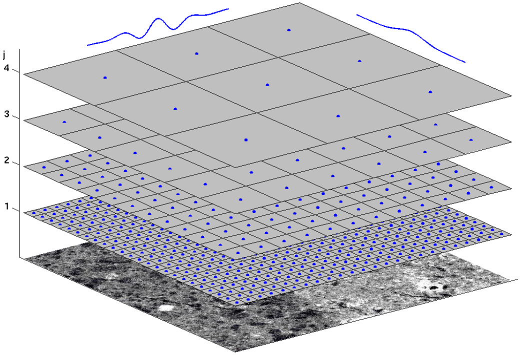
Calcul de coefficients d'ondelette en 2D



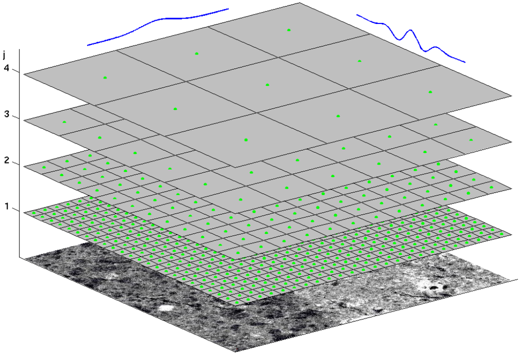
Calcul de coefficients d'ondelette en 2D



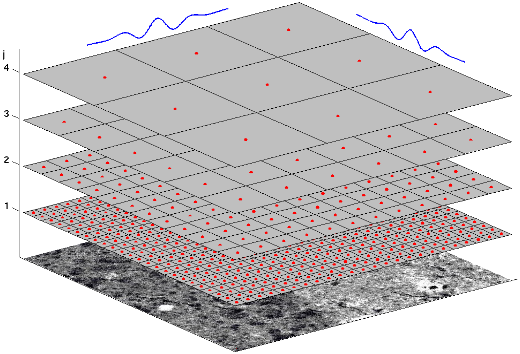
Calcul de coefficients d'ondelette en 2D



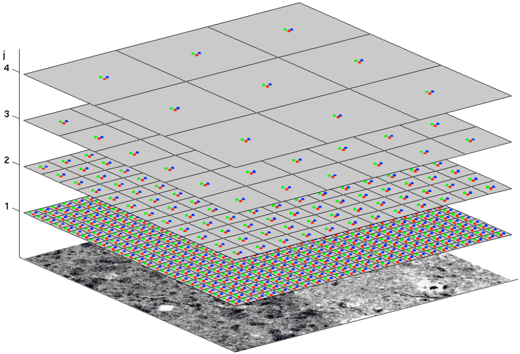
Calcul de coefficients d'ondelette en 2D



Calcul de coefficients d'ondelette en 2D



Calcul de coefficients d’ondelette en 2D



La fonction d'échelle ondelettes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La fonction d'échelle ondelettes $\zeta_f(p)$ de f est définie par :

$$\forall p > 0 \qquad 2^{-2j} \sum_{i,k} |c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p) j} \quad \text{quand} \quad j \to +\infty$$

La fonction d'échelle ondelettes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La fonction d'échelle ondelettes $\zeta_f(p)$ de f est définie par :

$$\forall p > 0 \qquad 2^{-2j} \sum_{i,k} |c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p)j} \quad \text{quand} \quad j \to +\infty$$

Si $p \geq 1$, La fonction d'échelle ondelettes coïncide avec la fonction d'échelle de Kolmogorov (si les ondelettes sont assez régulières)

La fonction d'échelle ondelettes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La fonction d'échelle ondelettes $\zeta_f(p)$ de f est définie par :

$$\forall p > 0 \qquad 2^{-2j} \sum_{i,k} |c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p)j} \quad \text{quand} \quad j \to +\infty$$

Si $p \geq 1$, La fonction d'échelle ondelettes coïncide avec la fonction d'échelle de Kolmogorov (si les ondelettes sont assez régulières)

La fonction d'échelle ondelettes est bien définie pour des mesures

La fonction d’échelle ondelettes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La fonction d’échelle ondelettes $\zeta_f(p)$ de f est définie par :

$$\forall p > 0 \qquad 2^{-2j} \sum_{i,k} |c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p)j} \quad \text{quand} \quad j \to +\infty$$

Si $p \geq 1$, La fonction d’échelle ondelettes coïncide avec la fonction d’échelle de Kolmogorov (si les ondelettes sont assez régulières)

La fonction d’échelle ondelettes est bien définie pour des mesures

La fonction d’échelle ondelettes s’étend aux $p > 0$

La fonction d'échelle ondelettes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La fonction d'échelle ondelettes $\zeta_f(p)$ de f est définie par :

$$\forall p > 0 \qquad 2^{-2j} \sum_{i,k} |c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p) j} \quad \text{quand} \quad j \to +\infty$$

Si $p \geq 1$, La fonction d'échelle ondelettes coïncide avec la fonction d'échelle de Kolmogorov (si les ondelettes sont assez régulières)

La fonction d'échelle ondelettes est bien définie pour des mesures

La fonction d'échelle ondelettes s'étend aux $p > 0$

Analyse multifractale : on effectue des regressions

pour une infinité de valeurs de p

Le rôle de la fonction d'échelle ondelettes

$$\forall p \geq 1, \qquad \zeta_f(p) = p \cdot \sup \{ s : f \in Lip\,(s, L^p) \}$$

Le rôle de la fonction d'échelle ondelettes

$$\forall p \geq 1, \qquad \zeta_f(p) = p \cdot \sup \{ s : f \in Lip\,(s, L^p) \}$$

- Si f est une mesure, $\zeta_f(1) \geq 0$
- Si $\zeta_f(p) > 0$, f appartient à L^p

Le rôle de la fonction d'échelle ondelettes

$$\forall p \geq 1, \qquad \zeta_f(p) = p \cdot \sup \{ s : f \in Lip\,(s, L^p) \}$$

- Si f est une mesure, $\zeta_f(1) \geq 0$
- Si $\zeta_f(p) > 0$, f appartient à L^p
- La fonction d'échelle ondelettes est indépendante de la base d'ondelettes (assez régulières) choisie
- Elle est calculée par des régressions log-log

Estimation pour des images de synthèse

Fonction d'échelle ondelettes : $$2^{-2j}\sum_{i,k}|c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p)\,j}$$

Calculs pour des fonctions indicatrices :

Disque : $\zeta_f(p) = 1$ Flocon de Van Koch : $\zeta_f(p) = 2 - \dfrac{\log 4}{\log 3} \sim 0.74$

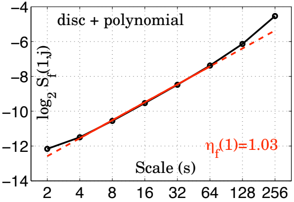
Estimation pour des images de synthèse

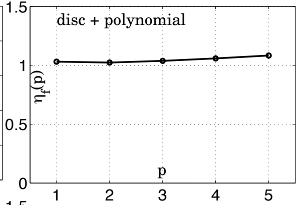
Fonction d'échelle ondelettes : $$2^{-2j} \sum_{i,k} |c^i_{j,k}|^p \sim 2^{-\zeta_f(p)\, j}$$

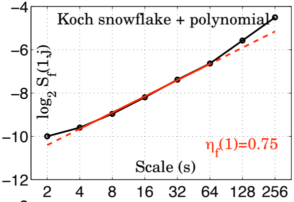
Calculs pour des fonctions indicatrices :

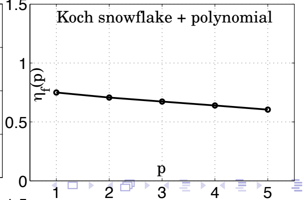
Disque : $\zeta_f(p) = 1$ **Flocon de Van Koch :** $\zeta_f(p) = 2 - \frac{\log 4}{\log 3} \sim 0.74$

Image : Régression log/log pour $p = 1$: Fonction d'échelle :

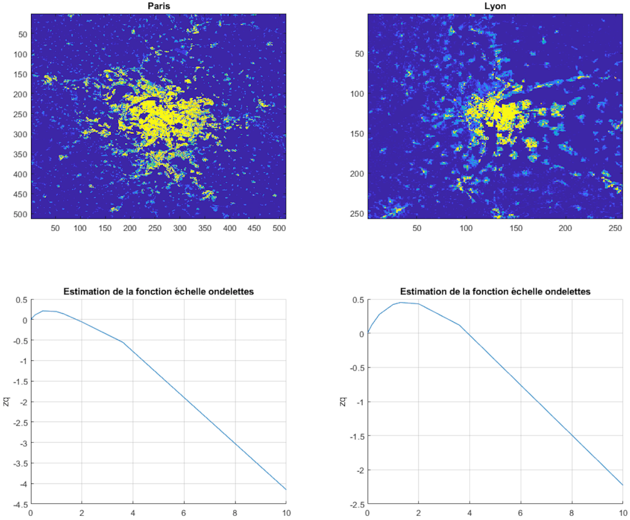






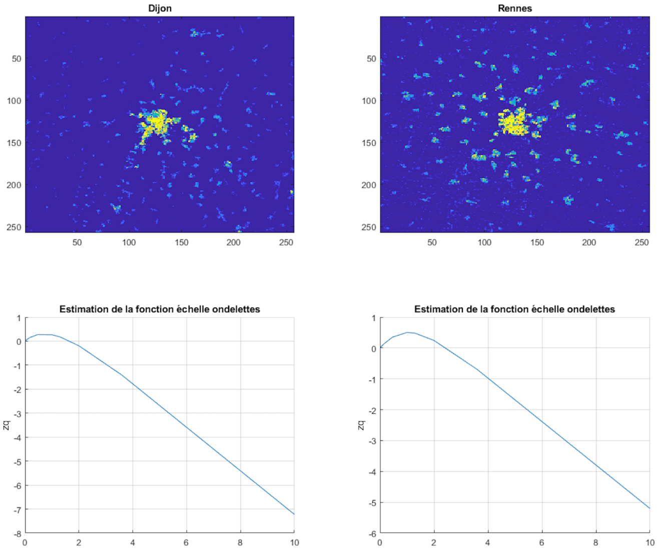


Population de villes : Fonctions d'échelle



Crédit : Projet Multifrac (UGE, Oliver Bonin et Stéphane Jaffard)
Figure obtenue par Guillaume Saes

Population de villes : Fonctions d'échelle



Crédit : Projet Multifrac (UGE, Oliver Bonin et Stéphane Jaffard)
Figure obtenue par Guillaume Saes

Régularité hölderienne uniforme (cas $p = +\infty$)

Espaces de Hölder : Soit $\alpha \in (0, 1)$; $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^2)$ si $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ et

$$\exists C, \ \ \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^{\alpha}$$

Régularité hölderienne uniforme (cas $p = +\infty$)

Espaces de Hölder : Soit $\alpha \in (0, 1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et

$$\exists C, \ \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^\alpha$$

Extension pour les autres valeurs de α :

Si $\alpha > 1$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ si les dérivées partielles de f d'ordre $[\alpha]$ appartiennent à $C^{\alpha-[\alpha]}(\mathbb{R}^2)$

Régularité hölderienne uniforme (cas $p = +\infty$)

Espaces de Hölder : Soit $\alpha \in (0,1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et

$$\exists C, \ \ \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x-y|^\alpha$$

Extension pour les autres valeurs de α :

Si $\alpha > 1$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ si les dérivées partielles de f d'ordre $[\alpha]$ appartiennent à $C^{\alpha-[\alpha]}(\mathbb{R}^2)$

$$f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2) \quad \text{si} \quad \exists C \quad \forall j,k \qquad |c^i_{j,k}| \leq C 2^{-\alpha j}$$

L'exposant de Hölder uniforme de f est

$$H_f^{min} = \sup\{\alpha : \ f \in C^\alpha\}$$

Calcul numérique

Soit $\omega_j = \sup_{i,k} |c^i_{j,k}|$; alors $H_f^{min} = \liminf_{j \to +\infty} \dfrac{\log(\omega_j)}{\log(2^{-j})}$

Régularité hölderienne uniforme (cas $p = +\infty$)

Espaces de Hölder : Soit $\alpha \in (0,1)$; $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et

$$\exists C, \ \ \forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^\alpha$$

Extension pour les autres valeurs de α :

Si $\alpha > 1$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ si les dérivées partielles de f d'ordre $[\alpha]$ appartiennent à $C^{\alpha - [\alpha]}(\mathbb{R}^2)$

$$f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2) \quad \text{si} \quad \exists C \quad \forall j, k \qquad |c^i_{j,k}| \leq C 2^{-\alpha j}$$

L'exposant de Hölder uniforme de f est

$$H_f^{min} = \sup\{\alpha : \ f \in C^\alpha\}$$

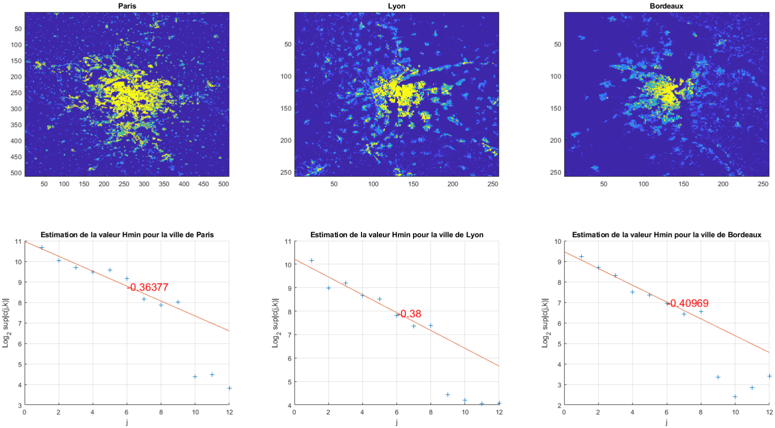
Calcul numérique

Soit $\quad \omega_j = \sup_{i,k} |c^i_{j,k}|$; $\qquad$ alors $\quad H_f^{min} = \liminf_{j \to +\infty} \dfrac{\log(\omega_j)}{\log(2^{-j})}$

$$H_f^{min} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ est continue}$$

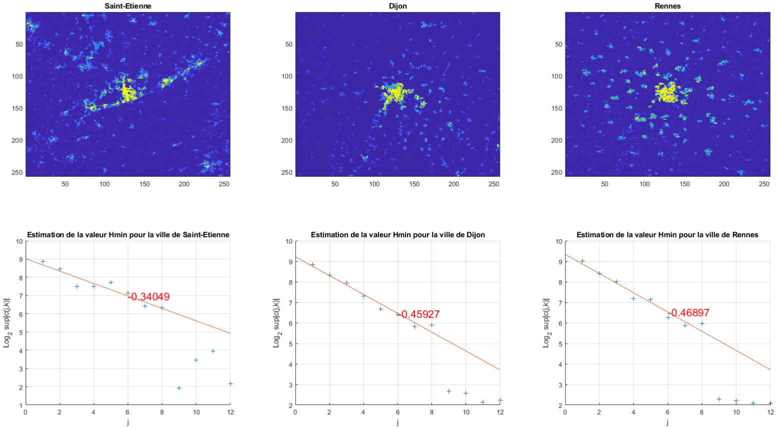
$$H_f^{min} < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{ n'est pas localement bornée}$$

Régularité uniforme de la population de villes



Invariance d'échelle des quantités $\omega_j = \sup_{i,k} |c^i_{j,k}|$

Régularité uniforme de la population de villes



Invariance d'échelle des quantités $\omega_j = \sup_{i,k} |c^i_{j,k}|$

Pour en savoir plus

Sur les fractals et l'invariance d'échelle

Benoît Mandelbrot : *Les objets fractals, The fractal geometry of nature*
Jens Feder : *Fractals*
Manfred Schroeder : *Fractals, Chaos, power laws*

Ville et fractals

Pierre Frankhauser : *La fractalité des structures urbaines*

Ondelettes

Stéphane Jaffard, Yves Meyer et Robert Ryan : *Wavelets : Tools for Science and Technology*

Articles de review sur l'analyse multifractale

Stéphane Jaffard, Patrick Abry, Herwig Wendt :
Irregularities and Scaling in Signal and Image Processing : Multifractal Analysis http ://arxiv.org/pdf/1210.0482v1.pdf

A bridge between geometric measure theory and signal processing : Multifractal analysis
http ://www.irit.fr/ Herwig.Wendt/data/AbelRevised4-1.pdf