Transport et trafic en milieu urbain : quelques questions mathématiques et algorithmiques

Frédéric Meunier

30 mai 2022

École des Ponts

Journée "Mathématiques et informatique pour la ville"

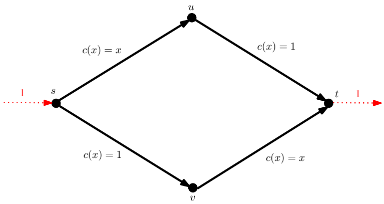
Trois sujets

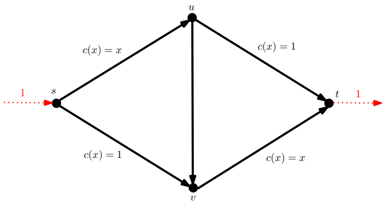
- Équilibres de Nash sur les réseaux
- Gestion de systèmes de vélos en libre-service
- Tournées d'enlèvement de déchets ménagers

Plan

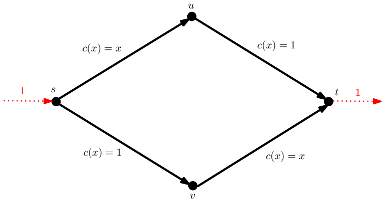
1. Équilibres de Nash sur les réseaux
2. Gestion de systèmes de vélos en libre-service
3. Tournées d'enlèvement de déchets ménagers

Le paradoxe de Braess



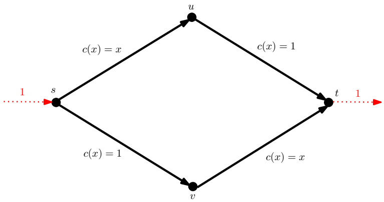


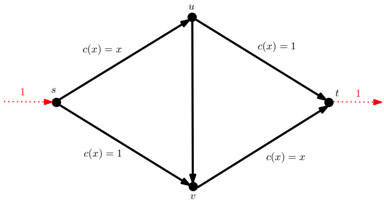
Le paradoxe de Braess



Ajouter une voie rapide peut détériorer les temps de parcours de tous les usagers.

Le paradoxe de Braess

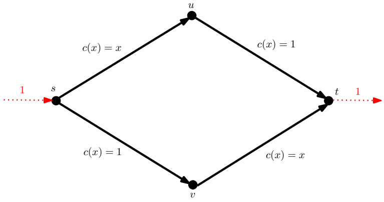


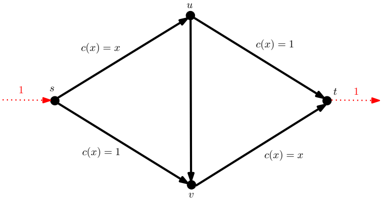


Ajouter une voie rapide peut détériorer les temps de parcours de tous les usagers.

C'est le paradoxe de Braess, observé en pratique de nombreuses fois.

Le paradoxe de Braess



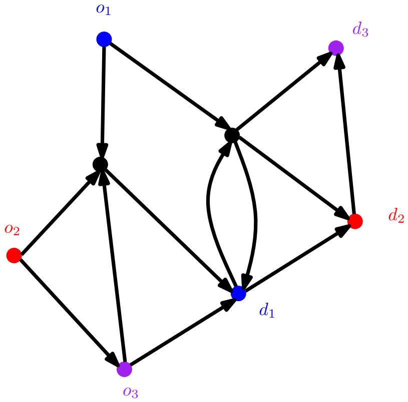


Ajouter une voie rapide peut détériorer les temps de parcours de tous les usagers.

C'est le paradoxe de Braess, observé en pratique de nombreuses fois.

Intuition mise en défaut $\Longrightarrow$ utiliser les mathématiques

Modèle



⋆ $D = (V, A)$: graphe orienté

⋆ $\mathcal{L} \subseteq V^2$: ensemble de paires origine-destination

⋆ $b^{st} \in \mathbb{R}_+$: quantité d'usagers souhaitant aller de s à t (demande)

⋆ Sur chaque arc $a \in A$, coût $c_a(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

x_a = quantité d'usagers choisissant l'arc a

$\sum_{a \in P} c_a(x_a)$ = coût du chemin P

Les usagers choisissent des chemins de coût minimum.

Équilibre de Nash

Équilibre = collection (y_P) de réels positifs (les P sont les chemins du graphe) telle que

- pour tout $(s,t) \in \mathcal{L}$,

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{st}} y_P = b^{st} \,.$$

- pour tout $(s,t) \in \mathcal{L}$ et tout $P \in \mathcal{P}_{st}$,

$$y_P > 0 \implies \text{coût}(P) \leqslant \text{coût}(P') \quad \text{pour tout } P' \in \mathcal{P}_{st} \,.$$

(condition de Wardrop)

Questions

- Existence ?
- Unicité ?
- Peut-on en calculer efficacement ?
- Comparaison avec l'optimum social ?

Caractérisation

Théorème Beckman, 1956

Supposons les fonctions c_a croissantes. Alors (x_a^{st}) forme un équilibre si et seulement si solution optimale de

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} c_a(u)\,\mathrm{d}u \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{L}} x_a^{st} = x_a && \forall a \in A \\
& \sum_{a \in \delta^+(s)} x_a^{st} - \sum_{a \in \delta^-(s)} x_a^{st} = b^{st} && \forall (s,t) \in \mathcal{L} \\
& \sum_{a \in \delta^+(v)} x_a^{st} = \sum_{a \in \delta^-(v)} x_a^{st} && \forall (s,t) \in \mathcal{L}, \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
& x_a^{st} \geqslant 0 && \forall (s,t) \in \mathcal{L}, \forall a \in A\,.
\end{aligned}$$

Optimisation convexe ! $\Longrightarrow$ Permet de répondre aux trois premières questions : existence, unicité, calcul.

Comparaison avec l'optimum social

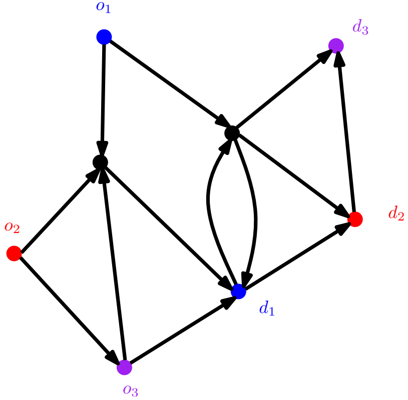
Théorème Roughgarden–Tardos, 2001

Si les fonctions c_a sont affines, alors

$$\text{coût(équilibre)} \leqslant \frac{4}{3} \times \text{coût optimal}\,.$$

$\Longrightarrow$ Prix de l'anarchie

Modèle multiclasse



⋆ $D = (V, A)$: graphe orienté

⋆ $\mathcal{L} \subseteq V^2$: ensemble de paires origine-destination

⋆ $b^{st,k} \in \mathbb{R}_+$: quantité d'usagers de la classe k souhaitant aller de s à t

⋆ Sur chaque arc $a \in A$, coût $c_a^k(\cdot) \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pour la classe k

x_a = quantité d'usagers choisissant l'arc a

$\sum_{a \in P} c_a^k(x_a)$ =coût du chemin P pour la classe k

Les usagers choisissent des chemins de coût minimum.

Équilibre de Nash

Équilibre = collection (y_P^k) de réels positifs telle que

$\star$ pour tout $(s,t) \in \mathcal{L}$ et tout k

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_{st}} y_P^k = b^{st,k} .$$

$\star$ pour tout $(s,t) \in \mathcal{L}$ et tout $P \in \mathcal{P}_{st}$,

$$y_P^k > 0 \implies \text{coût}^k(P) \leqslant \text{coût}^k(P') \quad \text{pour tout } P' \in \mathcal{P}_{st} .$$

(condition de Wardrop)

Questions

- Existence ?
- Unicité ?
- Peut-on en calculer efficacement ?
- Comparaison avec l'optimum social ?

Questions

⋆ Existence ?
Oui, théorèmes de point fixe

⋆ Unicité ?

⋆ Peut-on en calculer efficacement ?

⋆ Comparaison avec l'optimum social ?

Questions

⋆ Existence ?
Oui, théorèmes de point fixe

⋆ Unicité ?
Pas toujours, même quand les c_a^k sont croissantes

⋆ Peut-on en calculer efficacement ?

⋆ Comparaison avec l'optimum social ?

Questions

⋆ Existence ?
Oui, théorèmes de point fixe

⋆ Unicité ?
Pas toujours, même quand les c_a^k sont croissantes

⋆ Peut-on en calculer efficacement ?
En général, non : PPAD-complétude

⋆ Comparaison avec l'optimum social ?

Questions

⋆ Existence ?
Oui, théorèmes de point fixe

⋆ Unicité ?
Pas toujours, même quand les c_a^k sont croissantes

⋆ Peut-on en calculer efficacement ?
En général, non : PPAD-complétude

⋆ Comparaison avec l'optimum social ?
Peu étudié

Exemple de résultat sur l'unicité

Proposition Aashtiani–Magnanti, 1981

Si pour tout a, les c_a^k sont identiques à une constante près, alors les x_a sont les mêmes dans tous les équilibres.

Autre exemple de résultat sur l'unicité

G = graphe non orienté

(G, s, t) a la propriété d'unicité =
pour tout choix des demandes $(b^{st,k})$ et des coûts (c_a^k), les x_a à l'équilibre sont uniques

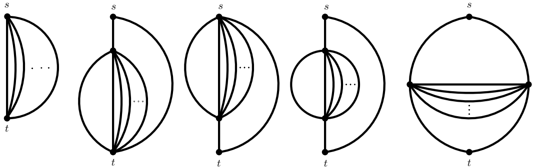
(sur le graphe orienté obtenu en remplaçant chaque arête par deux arcs opposés, avec (s, t) comme unique paire origine-destination)

Théorème Milchtaich, 2005

(G, s, t) a la propriété d'unicité $\iff$ G est presque parallèle.

presque parallèle =

combinaison en série de



Plan

Problématiques

- Localisation des stations
- Dimensionnement des flottes
- Niveau de stock
- Incitations au rééquilibrage
- Repositionnement des vélos

Souvent, on peut avoir des versions statique et dynamique.

Illustre la démarche de la recherche opérationnelle

Plan

Conception d'un système

Étant donnée une ville, où positionner des stations afin de maximiser le revenu de l'opérateur ?

$\mathcal{L}$ = ensemble de paires origine-destination, demande b^{st} connue pour tout $(s, t) \in \mathcal{L}$

S = ensemble de positions potentielles

c = budget maximal autorisé

r_{ij} = revenu généré par déplacement $i \to j$ (avec $i, j \in S$)

Objectif : Maximiser le revenu

Modèle

Miller-Hook et Nair (2014) ont proposé un modèle de la forme :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{i,j \in S} r_{ij} x_{ij\ell} \\ \text{s.c.} \quad & A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + C\boldsymbol{y} + D\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{e} \\ & \boldsymbol{x} = \text{User-reaction}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ & x_{ij\ell} \in \mathbb{R}_+, u_i \in \{0,1\}, y_i, z_i \in \mathbb{Z}_+ \,. \end{aligned}$$

Signification variables :

- $x_{ij\ell}$ = quantité d'usagers de la paire ℓ faisant le trajet $i \to j$ à vélo
- $u_i = 1$ si on ouvre une station à la position potentielle i
- y_i = nombre de bornes à la station i
- z_i = nombre de vélos en "régime permanent" à la station i

Résolution

C'est un problème biniveau.

Théorème Florian–Spiess, 1989

$\boldsymbol{x} = \text{User-reaction}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est solution d'un programme linéaire.

Le modèle Miller-Hook–Nair s'écrit donc comme un grand programme linéaire en nombres entiers.

Peut être résolu avec des données réelles à l'aide de solvers librement disponibles sur internet.

Plan

Problématique

Deux types de repositionnement sont considérés.

Statique.

- Aucun usager dans le système
- Vélos déplacés entre les stations afin de passer d'une répartition initiale à une répartition cible
- Modélise le système pendant la nuit

Dynamique.

- Usagers dans le système
- Vélos déplacés afin d'éviter des situations problématiques
- Modélise le système pendant le jour

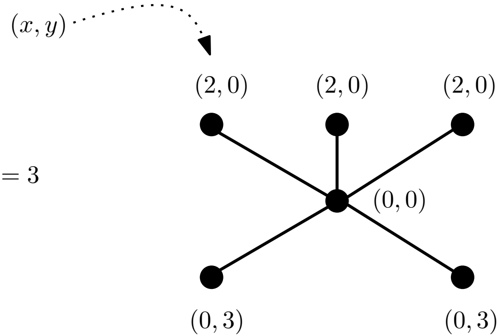
Modèle statique

Input. Graphe orienté $D = (V, A)$, répartitions initiale et cible $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}_+^V$, coûts sur les arcs $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_+^A$, capacité du camion Q

Output. Trajet du camion, avec les opérations d'enlèvement et de dépose, de coût minimal, faisant passer le système de $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{y}$

Exemple

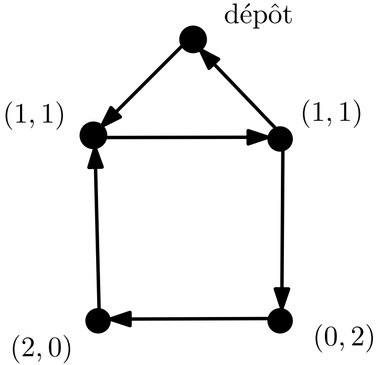
$Q = 3$



Sans préemption : meilleure solution en 10 mouvements

Avec préemption : meilleure solution en 8 mouvements

Exemple



Avec préemption, on peut avoir des solutions optimales opérant à des stations déjà à leur niveau cible.

Quelques résultats théoriques

Cas préemptif.

- C'est un problème NP-difficile.
- Il existe une 11-approximation polynomiale.
- C'est polynomial pour les arbres.

De plus,

Proposition

Si l'on connaît le trajet optimal, on peut retrouver en temps polynomial les opérations optimales.

Modèle dynamique

- Arrivées poissonniennes de paramètre λ_{ij}
- Durées des trajets à vélo : d_{ij}
- Durée des trajets en camion : τ_{ij}
- Un camion de capacité Q

Objective. Maximiser le nombre d'usagers satisfaits par unité de temps

Déjà avec $Q = +\infty$, quasiment rien n'est connu.

Approche possible : simulation à événements discrets, heuristiques

Plan

Le problème du postier

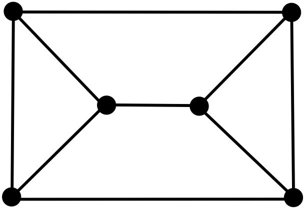
Problème du postier =
Étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ connexe, trouver le parcours fermé le plus court visitant toutes les arêtes.

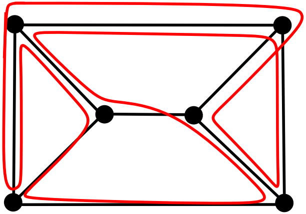
⋆ Un classique de l'optimisation combinatoire

⋆ Motivé par les problèmes de dépose de courrier, d'enlèvement des déchets

⋆ Théorème d'Euler (ponts de Königsberg) est un cas particulier

Exemple





Résultats

Lemme Guan 1960

Dans toute solution optimale, chaque arête est visitée au plus deux fois.

Encore vrai s'il y a des coûts > 0 sur chaque arc

Théorème Guan 1960

Le problème peut être résolu en temps polynomial.

Variantes

⋆ Cas d'un graphe orienté fortement connexe : encore polynomial, mais on perd la propriété bornant le nombre de passages par arête

⋆ Cas mixte (arêtes et arcs) : NP-difficile

Références bibliographiques I

M. Benchimol, P. Benchimol, B. Chappert, A. de la Taille, F. Laroche, F. Meunier, and L. Robinet, *Balancing the stations of a self service "bike hire" system*, RAIRO - Operations Research **45** (2011), 37–61.

D. Chemla, F. Meunier, T. Pradeau, R. Wolfler Calvo, and H. Yahiaoui, *Self-service bike sharing systems: simulation, repositioning, pricing*, Tech. report, (Hyper Articles en Ligne (HAL), 2013.

D. Chemla, F. Meunier, and R. Wolfler Calvo, *Bike-sharing systems: solving the static rebalancing problem*, Discrete Optimization **10** (2013), 120–146.

Horst A Eiselt, Michel Gendreau, and Gilbert Laporte, *Arc routing problems, part i: The chinese postman problem*, Operations Research **43** (1995), no. 2, 231–242.

Alex Fabrikant, Christos Papadimitriou, and Kunal Talwar, *The complexity of pure nash equilibria*, Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing, 2004, pp. 604–612.

Max Klimm and Philipp Warode, *Complexity and parametric computation of equilibria in atomic splittable congestion games via weighted block laplacians*, Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SIAM, 2020, pp. 2728–2747.

Références bibliographiques II

Gilbert Laporte, Frédéric Meunier, and Roberto Wolfler Calvo, *Shared mobility systems: an updated survey*, Annals of Operations Research **271** (2018), no. 1, 105–126.

Igal Milchtaich, *Topological conditions for uniqueness of equilibrium in networks*, Mathematics of Operations Research **30** (2005), no. 1, 225–244.

Frédéric Meunier and Thomas Pradeau, *The uniqueness property for networks with several origin–destination pairs*, European Journal of Operational Research **237** (2014), no. 1, 245–256.

Frédéric Meunier and András Sebö, *Graphes et applications (chapitre 1)*, Parcours et coupes, tome 2, 2007.

R. Nair and E. Miller-Hooks, *Fleet management for vehicle sharing operations*, Transportation Science **45** (2011), 524–540.

______, *Equilibrium network design of shared-vehicle systems*, European Journal of Operational Research **235** (2014), 47–61.

Tim Roughgarden and Éva Tardos, *How bad is selfish routing?*, Journal of the ACM (JACM) **49** (2002), no. 2, 236–259.

H. Spiess and M. Florian, *Optimal strategies: A new assignment model for transit networks*, Transportation Research Part B **23** (1989), 83–102.