

# Éléments de géométrie convexe aléatoire asymptotique

Labex  
**BÉZOUT**



*Pierre Calka*



# Plan

Une certaine géométrie aléatoire

Triangles et simplexes aléatoires

Polytopes aléatoires et leurs fluctuations

## Une certaine géométrie aléatoire

Jeter des points au hasard

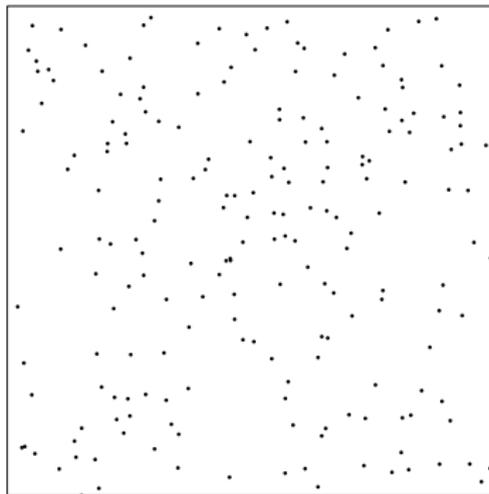
Faire une construction géométrique déterministe

Étudier des problèmes asymptotiques

Triangles et simplexes aléatoires

Polytopes aléatoires et leurs fluctuations

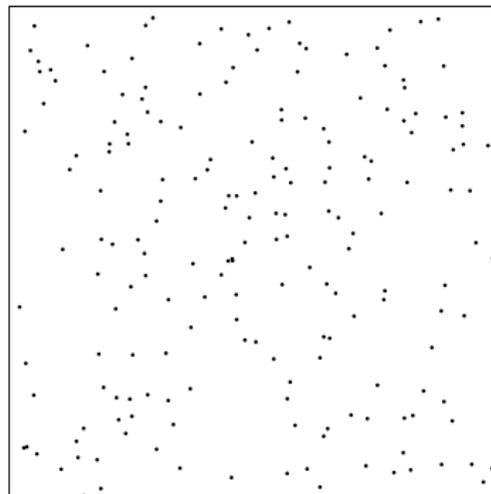
## Jeter des points au hasard dans une fenêtre $W$



### Processus ponctuel binomial

Fixer  $n \geq 1$ , jeter  $n$  points indépendants et uniformes dans  $W$

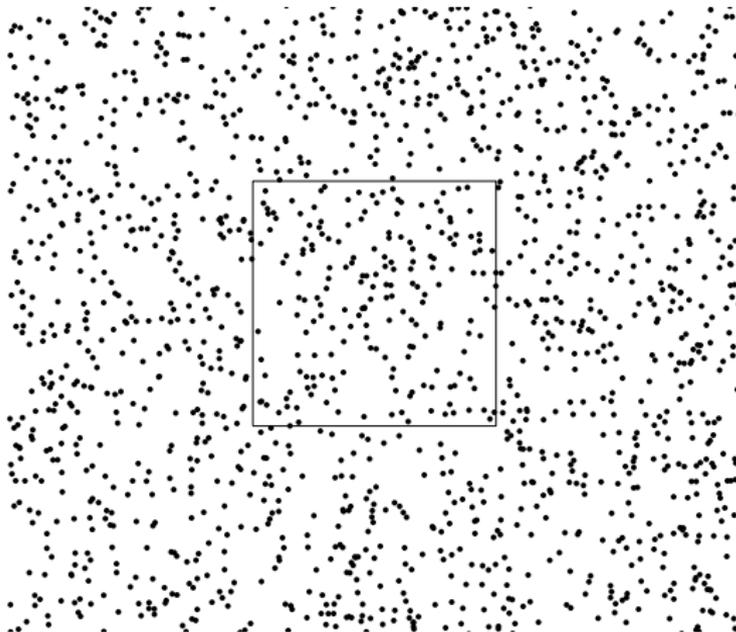
## Jeter des points au hasard dans une fenêtre $W$



Processus ponctuel de Poisson dans  $W$

Fixer  $n \geq 1$ , jeter  $Pois(n)$  points indépendants et uniformes dans  $W$

# Jeter des points au hasard dans $\mathbb{R}^d$



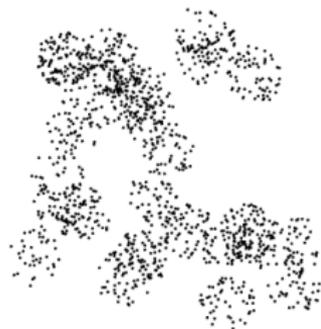
Processus ponctuel de Poisson homogène dans  $\mathbb{R}^d$

Même intersection avec  $W$  et propriété d'indépendance

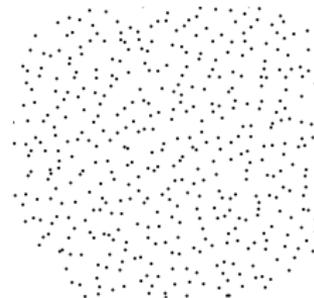
# Jeter des points au hasard dans $\mathbb{R}^d$



Processus ponctuel de  
Poisson gaussien



Processus de Matérn  
cluster



Processus déterminantal  
de Ginibre

## Une certaine géométrie aléatoire

Jeter des points au hasard

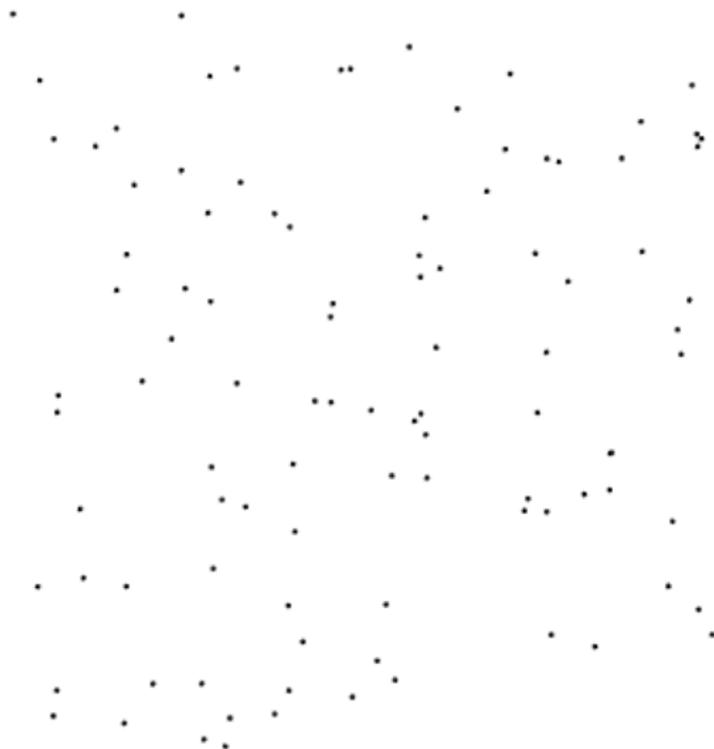
Faire une construction géométrique déterministe

Étudier des problèmes asymptotiques

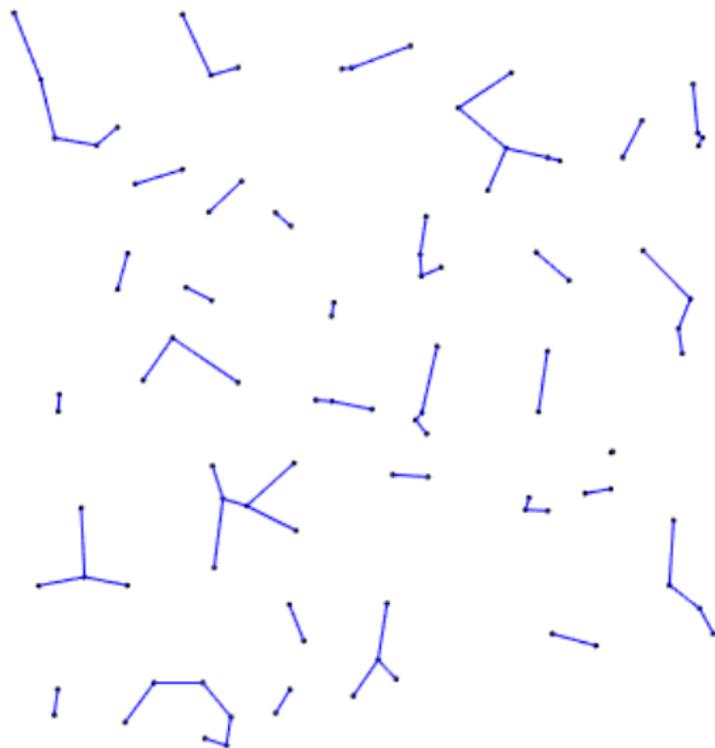
Triangles et simplexes aléatoires

Polytopes aléatoires et leurs fluctuations

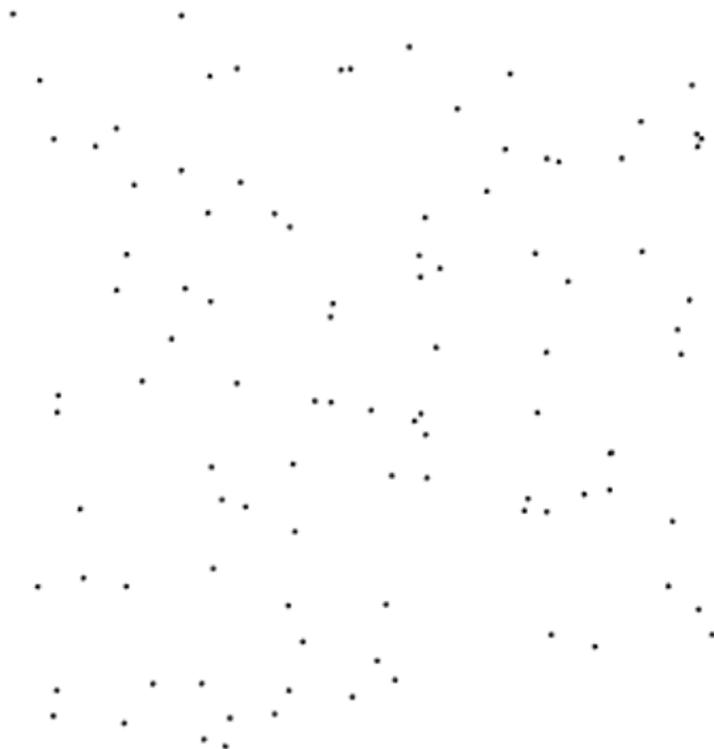
# Faire une construction géométrique



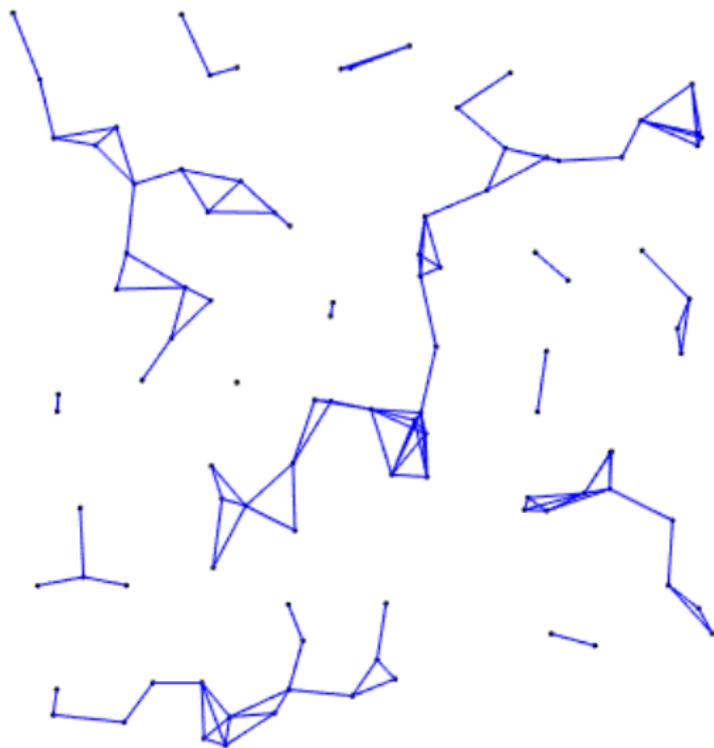
## Graphe du plus proche voisin



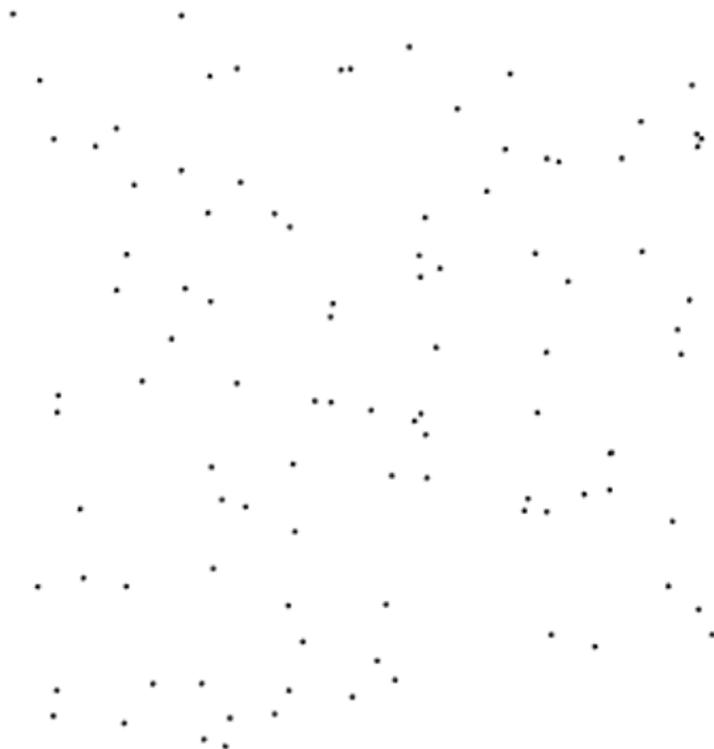
# Faire une construction géométrique



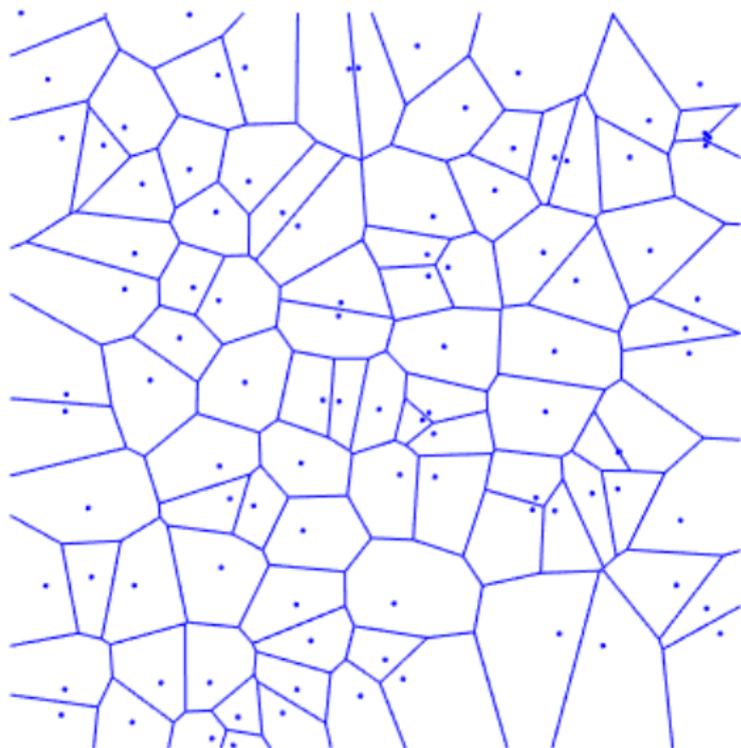
# Graphe géométrique aléatoire



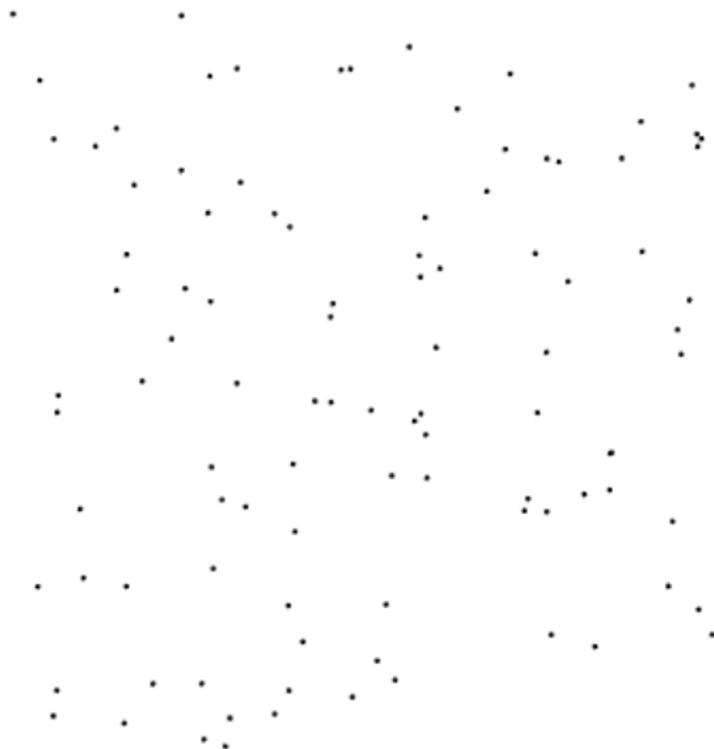
# Faire une construction géométrique



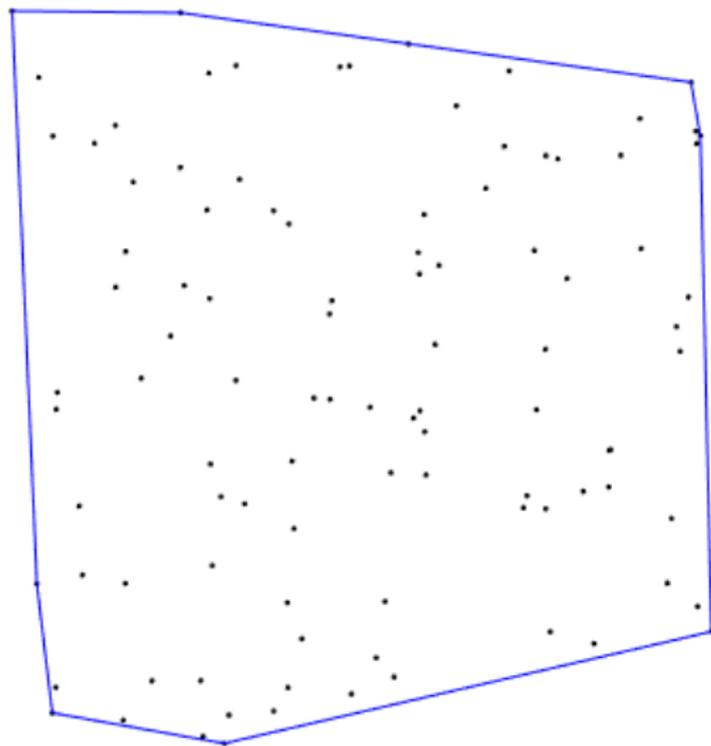
# Mosaïque de Poisson-Voronoi



# Faire une construction géométrique



# Enveloppe convexe



## Une certaine géométrie aléatoire

Jeter des points au hasard

Faire une construction géométrique déterministe

Étudier des problèmes asymptotiques

Triangles et simplexes aléatoires

Polytopes aléatoires et leurs fluctuations

# Problèmes quand la taille du nuage ou de la fenêtre grandit

- ▶ Théorèmes limites pour la longueur totale d'un graphe

**Références.** F. Avram et D. Bertsimas (1993), K. S. Alexander (1996), J. Yukich (2012)

- ▶ Percolation, existence de chemins infinis

**Références.** J.-B. Gouéré (2008), F. Baccelli, D. Coupier et V. C. Tran (2016)

- ▶ Loi des degrés, degré maximal

**Référence.** M. Penrose (1996)

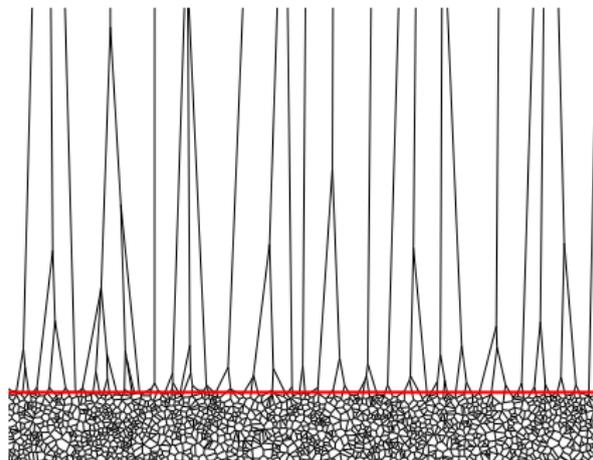
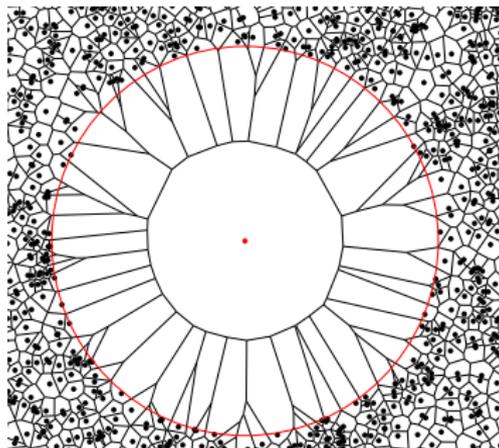
- ▶ Caractéristiques géométriques et combinatoires de l'enveloppe convexe

# Des événements de type asymptotique

- ▶ Cellules de Poisson-Voronoi de grande aire : de forme asymptotiquement sphérique

Références. D. G. Kendall (1945), D. Hug, M. Reitzner et R. Schneider (2003)

- ▶ Cellules conditionnées à contenir une grande forme, forme des cellules voisines



Référence. Travail avec Y. Demichel et N. Enriquez (2021, 2022)

# La dimension grandit

- ▶ Conjecture de l'hyperplan satisfaite par les cellules de Poisson-Voronoi

$\exists c > 0 : \forall d \geq 1$  et  $K \subset \mathbb{R}^d, \text{Vol}_d(K) = 1, \exists H$  tel que  $\text{Vol}_{d-1}(K \cap H) \geq c$

Référence. J. Hörmann, D. Hug, M. Reitzner, C. Thäle (2015)

- ▶ *Thin-shell concentration* : concentration de  $\|Y\|/\mathbb{E}(\|Y\|^2)^{\frac{1}{2}}$  pour  $Y$  vecteur aléatoire uniforme dans l'une de ces cellules

Références. O. Guédon et E. Milman (2011), E. O'Reilly (2020)

- ▶ Transition de phase pour le volume moyen d'enveloppes convexes aléatoires dans la boule unité

Références. G. Bonnet, Z. Kabluchko et N. Turchi (2022)

# Plan

## Une certaine géométrie aléatoire

Jeter des points au hasard

Faire une construction géométrique déterministe

Étudier des problèmes asymptotiques

## Triangles et simplexes aléatoires

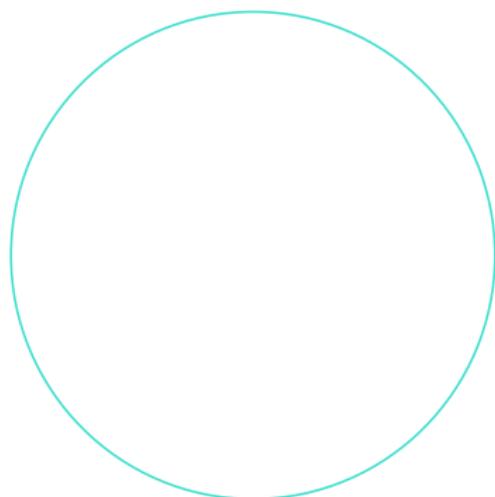
## Polytopes aléatoires et leurs fluctuations

# Triangle aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{S}_2$  triangle de sommets  $X_1, X_2, X_3$  i.i.d. uniformes dans  $K$

*Loi de l'aire du triangle  $\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2)$  ?*

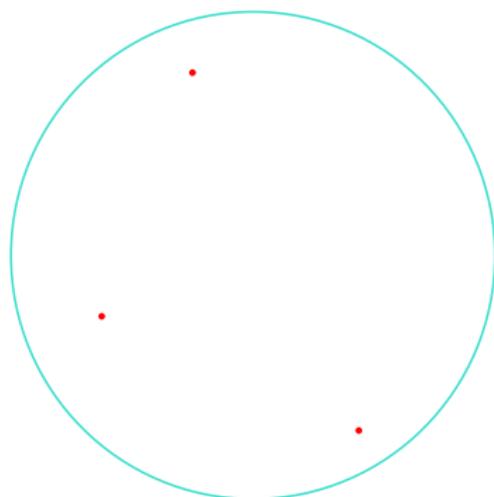


# Triangle aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{S}_2$  triangle de sommets  $X_1, X_2, X_3$  i.i.d. uniformes dans  $K$

*Loi de l'aire du triangle  $\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2)$  ?*

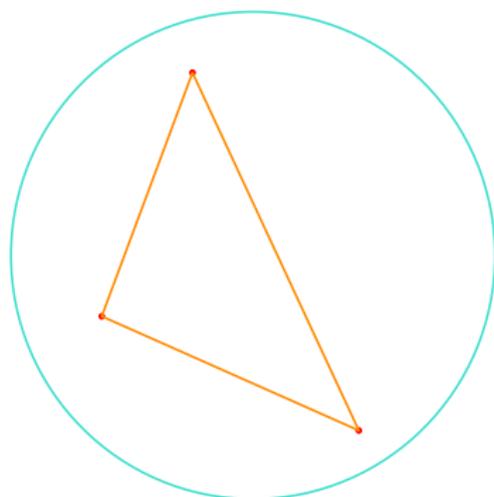


# Triangle aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{S}_2$  triangle de sommets  $X_1, X_2, X_3$  i.i.d. uniformes dans  $K$

*Loi de l'aire du triangle  $\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2)$  ?*

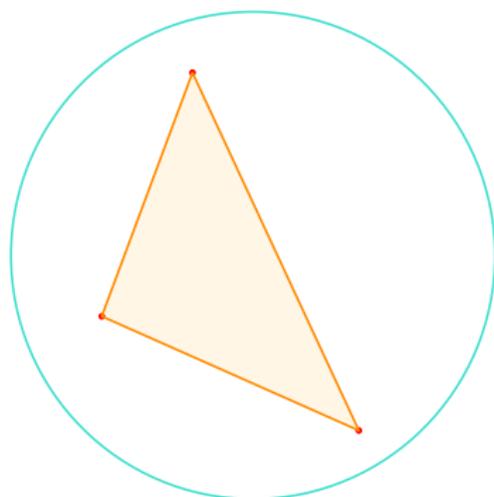


# Triangle aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{S}_2$  triangle de sommets  $X_1, X_2, X_3$  i.i.d. uniformes dans  $K$

*Loi de l'aire du triangle  $\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2)$  ?*



# Moyenne de l'aire du triangle aléatoire

- ▶ Lien avec le problème des 4 points de Sylvester (1864)

$$\mathbb{P}(X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ forment un quadrilatère}) = 1 - 4 \frac{\mathbb{E}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2))}{\text{Vol}_2(K)}$$

- ▶ Calculs explicites :  $\text{Vol}_2(K) = 1$ ,  $\mathcal{V}(K) = \mathbb{E}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2))$

$K$				
$\mathcal{V}(K)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{144}$	$\frac{289}{3888}$	$\frac{35}{48\pi^2}$

- ▶ Monotonie

$$\mathcal{V}(\bigcirc) \leq \mathcal{V}(K) \leq \mathcal{V}(\triangle)$$

Généralisation de l'inégalité gauche en toute dimension

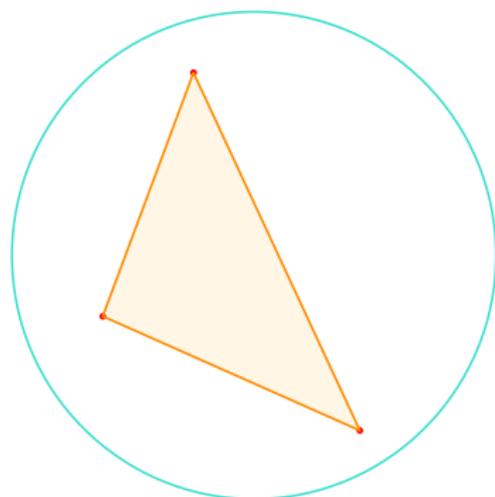
Références. Blaschke (1917), Busemann (1953), Buchta (1983), Groemer (1973)

# Simplexe aléatoire dans la boule unité

$\mathbb{B}^d$  boule unité de  $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{S}_d$  simplexe de sommets  $X_1, \dots, X_{d+1}$  i.i.d. uniformes dans  $\mathbb{B}^d$

*Loi du volume du simplexe  $\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d)$  ?*



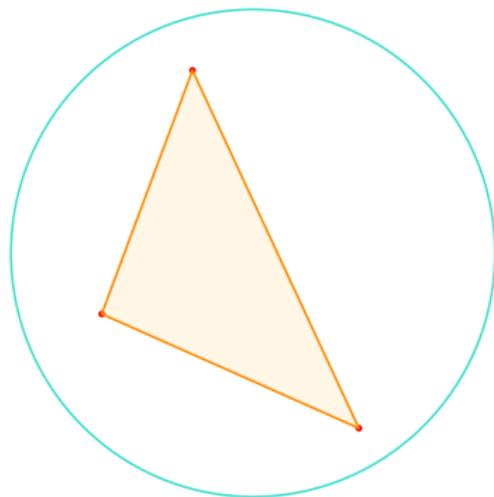
# Simplexe aléatoire dans la boule unité

Référence. Miles (1971)

$$\mathbb{E}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d)^k) = \frac{1}{(d!)^k} \left( \frac{d}{d+k} \right)^{d+1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(d+1)(d+k)+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}d(d+1+k)+1)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}(d+k))} \prod_{\ell=1}^{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(k+\ell))}{\Gamma(\frac{\ell}{2})}$$

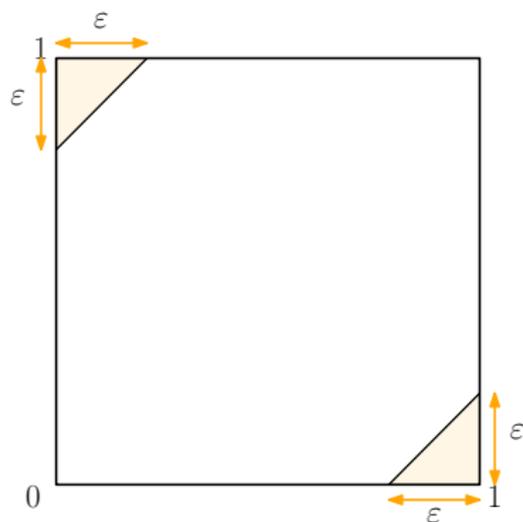
$$\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \leq v_d = \text{Vol}_d(\mathcal{S}_{\text{reg}}) = \frac{(d+1)^{\frac{d+1}{2}}}{d!d^{\frac{d}{2}}}$$

*Queue de distribution*  $\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1-\varepsilon)), \varepsilon \rightarrow 0?$



# Queue de distribution : dimension 1

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_1(\mathcal{S}_1) \geq 2(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^2$$

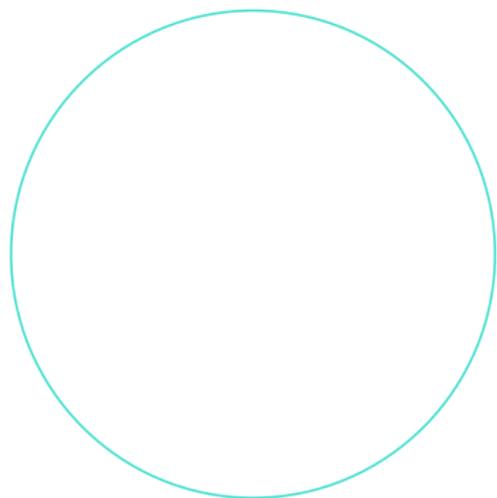


# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )

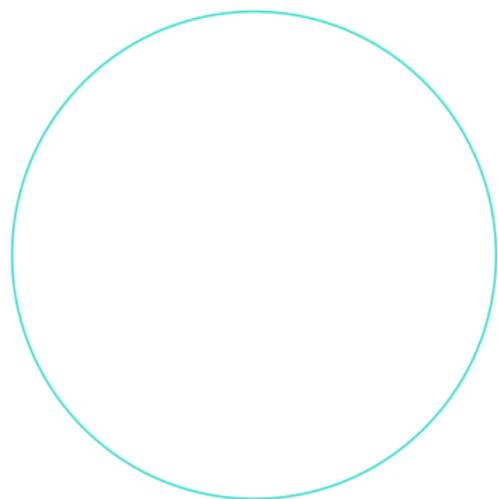


# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

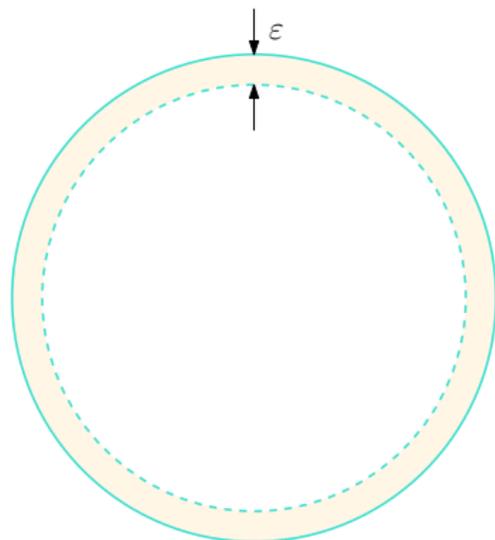
$\propto$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

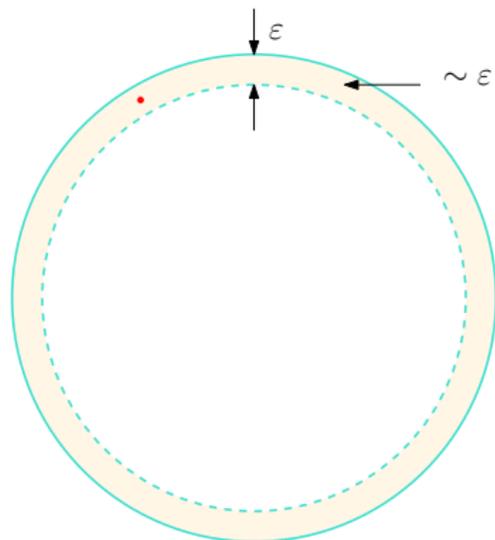
$\propto$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

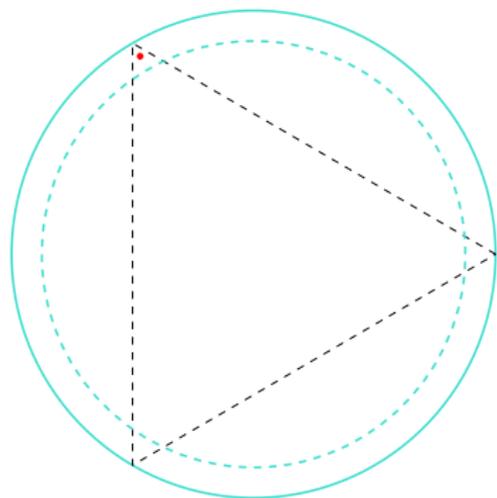
$$\propto \varepsilon$$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

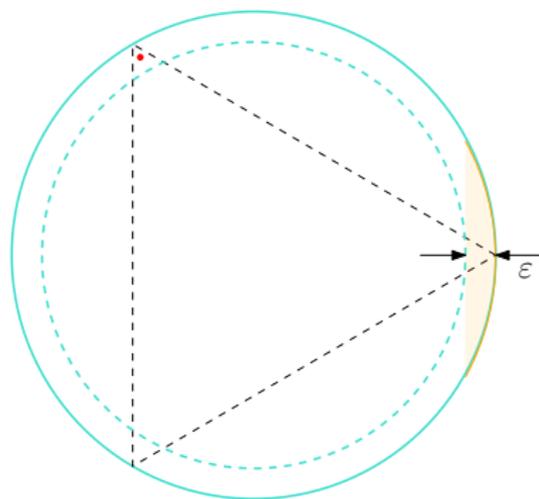
$$\propto \varepsilon$$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

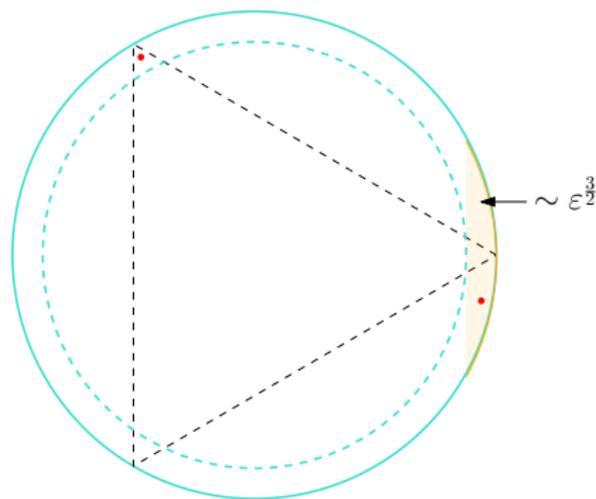
$$\propto \varepsilon$$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

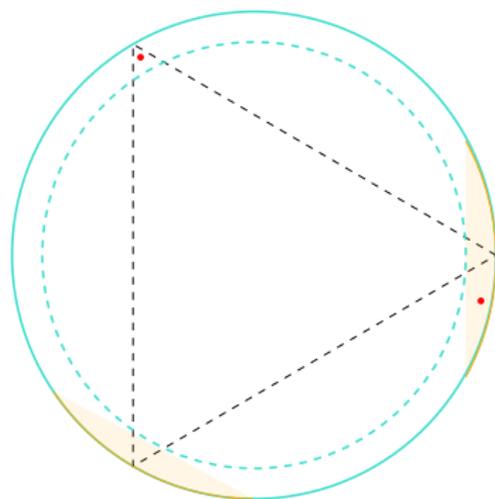
$$\propto \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

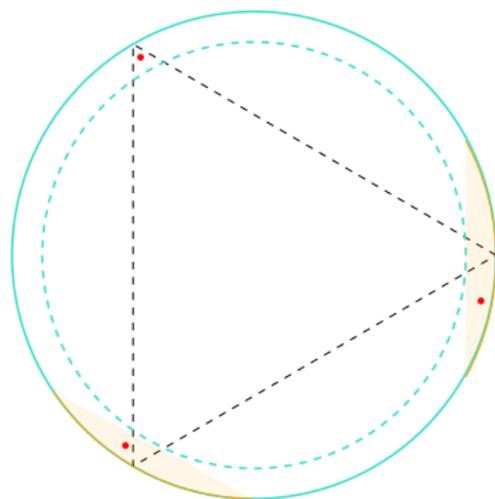
$$\propto \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

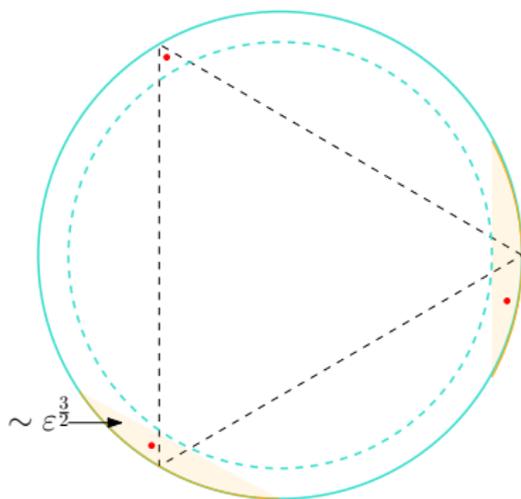
$$\propto \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

# Queue de distribution : dimension quelconque

Résultat avec J. Yukich (2022)

$$\mathbb{P}(\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) \geq v_d(1 - \varepsilon)) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} C_d \varepsilon^{\gamma_d}$$

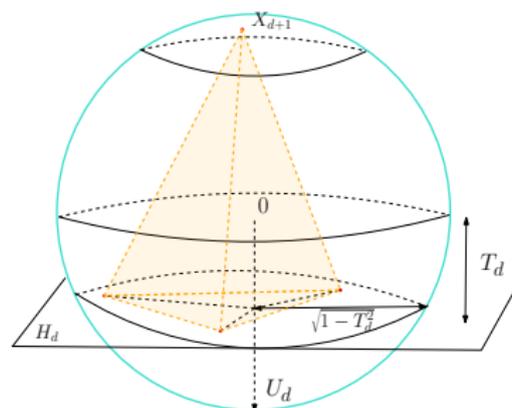
avec  $\gamma_d = \frac{d(d+1)}{4} + d + \frac{1}{2}$  ( $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 4$ ,  $\gamma_3 = \frac{13}{2} \dots$ )



$$\mathbb{P}(\text{Vol}_2(\mathcal{S}_2) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - \varepsilon))$$

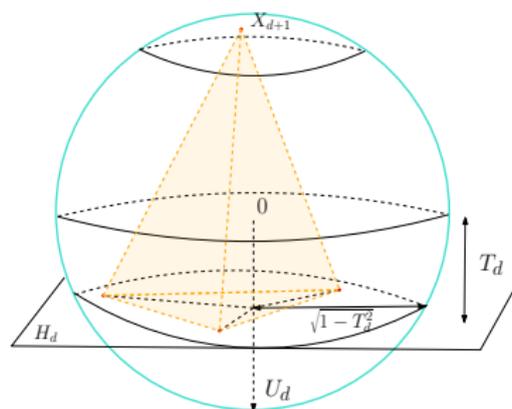
$$\propto \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \varepsilon^4$$

# Démonstration : récurrence et équivalence stochastique



- ▶  $H_d$  hyperplan  $\supset \{X_1, \dots, X_d\}$
- ▶  $U_d \in \mathbb{S}^{d-1}$  normal sortant
- ▶  $T_d = d(0, H_d)$
- ▶  $X_i = T_d U_d + \sqrt{1 - T_d^2} Y_i,$   
 $Y_i \in \mathbb{B}^{d-1}, 1 \leq i \leq d$

# Démonstration : récurrence et équivalence stochastique



- ▶  $H_d$  hyperplan  $\supset \{X_1, \dots, X_d\}$
- ▶  $U_d \in \mathbb{S}^{d-1}$  normal sortant
- ▶  $T_d = d(0, H_d)$
- ▶  $X_i = T_d U_d + \sqrt{1 - T_d^2} Y_i,$   
 $Y_i \in \mathbb{B}^{d-1}, 1 \leq i \leq d$

- ▶  $U_d, T_d, (Y_1, \dots, Y_d) \perp\!\!\!\perp$
- ▶  $U_d$  uniforme sur  $\mathbb{S}^{d-1}$
- ▶  $T_d$  de densité  $\propto (1 - t^2)^{\frac{d^2-1}{2}}$
- ▶  $(Y_1, \dots, Y_d)$  de densité  
 $\propto \text{Vol}_{d-1}(\text{Conv}(y_1, \dots, y_d))$

# Démonstration : utilisation de l'équivalence stochastique

$$\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) = V_d = \frac{1}{d} d(X_{d+1}, H_d) (1 - T_d)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}$$

où  $\tilde{V}_{d-1}$  volume du simplexe formé par  $Y_1, \dots, Y_d$

$$(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \iff (X_{d+1} \in \text{Cal}(-U_d, L_d))$$

où  $L_d = \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1-\varepsilon)}{\frac{1}{d}(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+$

$$\text{Vol}_d(\text{Cal}(u, h)) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} c_d h^{\frac{d+1}{2}}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1-\varepsilon)}{\frac{1}{d}(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

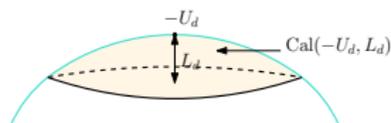
# Démonstration : utilisation de l'équivalence stochastique

$$\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) = V_d = \frac{1}{d} d(X_{d+1}, H_d) (1 - T_d)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}$$

où  $\tilde{V}_{d-1}$  volume du simplexe formé par  $Y_1, \dots, Y_d$

$$(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \iff (X_{d+1} \in \text{Cal}(-U_d, L_d))$$

$$\text{où } L_d = \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1-\varepsilon)}{\frac{1}{d}(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+$$



$$\text{Vol}_d(\text{Cal}(u, h)) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} c_d h^{\frac{d+1}{2}}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1-\varepsilon)}{\frac{1}{d}(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

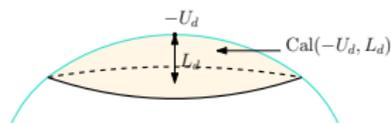
# Démonstration : utilisation de l'équivalence stochastique

$$\text{Vol}_d(\mathcal{S}_d) = V_d = \frac{1}{d} d(X_{d+1}, H_d) (1 - T_d)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}$$

où  $\tilde{V}_{d-1}$  volume du simplexe formé par  $Y_1, \dots, Y_d$

$$(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \iff (X_{d+1} \in \text{Cal}(-U_d, L_d))$$

où  $L_d = \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1-\varepsilon)}{\frac{1}{d}(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+$



$$\text{Vol}_d(\text{Cal}(u, h)) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} c_d h^{\frac{d+1}{2}}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1-\varepsilon)}{\frac{1}{d}(1-T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

## Démonstration : développement autour de $\mathcal{S}_{\text{reg}}$

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{d}(1 - T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

$T_d$  et  $\tilde{V}_{d-1}$  indépendantes et proches des valeurs pour  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  :

$$T'_d = \frac{1}{d} - T_d \quad \text{et} \quad \tilde{V}'_{d-1} = 1 - \frac{\tilde{V}_{d-1}}{v_{d-1}}.$$

Après développement pour  $T'_d$  et  $\tilde{V}'_{d-1}$  petits,

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( \varepsilon - c_d T_d'^2 - \tilde{V}'_{d-1} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right).$$

Par Fubini, si  $X \geq 0$  et  $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^\gamma$ , alors  $\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \sim c'\varepsilon^{\alpha+\gamma}$ .

Comme  $\mathbb{P}(T_d'^2 \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{P}(\tilde{V}'_{d-1} \leq \varepsilon) \sim c'\varepsilon^{\gamma_{d-1}}$ ,

$$\gamma_d = \gamma_{d-1} + \frac{d+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

## Démonstration : développement autour de $\mathcal{S}_{\text{reg}}$

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{d}(1 - T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

$T_d$  et  $\tilde{V}_{d-1}$  indépendantes et proches des valeurs pour  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  :

$$T'_d = \frac{1}{d} - T_d \quad \text{et} \quad \tilde{V}'_{d-1} = 1 - \frac{\tilde{V}_{d-1}}{v_{d-1}}.$$

Après développement pour  $T'_d$  et  $\tilde{V}'_{d-1}$  petits,

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( \varepsilon - c_d T_d'^2 - \tilde{V}'_{d-1} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right).$$

Par Fubini, si  $X \geq 0$  et  $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^\gamma$ , alors  $\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \sim c'\varepsilon^{\alpha+\gamma}$ .

Comme  $\mathbb{P}(T_d'^2 \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{P}(\tilde{V}'_{d-1} \leq \varepsilon) \sim c'\varepsilon^{\gamma_{d-1}}$ ,

$$\gamma_d = \gamma_{d-1} + \frac{d+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

## Démonstration : développement autour de $\mathcal{S}_{\text{reg}}$

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{d}(1 - T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

$T_d$  et  $\tilde{V}_{d-1}$  indépendantes et proches des valeurs pour  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  :

$$T'_d = \frac{1}{d} - T_d \quad \text{et} \quad \tilde{V}'_{d-1} = 1 - \frac{\tilde{V}_{d-1}}{v_{d-1}}.$$

Après développement pour  $T'_d$  et  $\tilde{V}'_{d-1}$  petits,

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( \varepsilon - c_d T_d'^2 - \tilde{V}'_{d-1} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right).$$

Par Fubini, si  $X \geq 0$  et  $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^\gamma$ , alors  $\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \sim c'\varepsilon^{\alpha+\gamma}$ .

Comme  $\mathbb{P}(T_d'^2 \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{P}(\tilde{V}'_{d-1} \leq \varepsilon) \sim c'\varepsilon^{\gamma_{d-1}}$ ,

$$\gamma_d = \gamma_{d-1} + \frac{d+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

## Démonstration : développement autour de $\mathcal{S}_{\text{reg}}$

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{d}(1 - T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

$T_d$  et  $\tilde{V}_{d-1}$  indépendantes et proches des valeurs pour  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  :

$$T'_d = \frac{1}{d} - T_d \quad \text{et} \quad \tilde{V}'_{d-1} = 1 - \frac{\tilde{V}_{d-1}}{v_{d-1}}.$$

Après développement pour  $T'_d$  et  $\tilde{V}'_{d-1}$  petits,

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( \varepsilon - c_d T_d'^2 - \tilde{V}'_{d-1} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right).$$

Par Fubini, si  $X \geq 0$  et  $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^\gamma$ , alors  $\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \sim c'\varepsilon^{\alpha+\gamma}$ .

Comme  $\mathbb{P}(T_d'^2 \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{P}(\tilde{V}'_{d-1} \leq \varepsilon) \sim c'\varepsilon^{\gamma_{d-1}}$ ,

$$\gamma_d = \gamma_{d-1} + \frac{d+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

## Démonstration : développement autour de $\mathcal{S}_{\text{reg}}$

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( 1 + T_d - \frac{v_d(1 - \varepsilon)}{\frac{1}{d}(1 - T_d^2)^{\frac{d-1}{2}} \tilde{V}_{d-1}} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right)$$

$T_d$  et  $\tilde{V}_{d-1}$  indépendantes et proches des valeurs pour  $\mathcal{S}_{\text{reg}}$  :

$$T'_d = \frac{1}{d} - T_d \quad \text{et} \quad \tilde{V}'_{d-1} = 1 - \frac{\tilde{V}_{d-1}}{v_{d-1}}.$$

Après développement pour  $T'_d$  et  $\tilde{V}'_{d-1}$  petits,

$$\mathbb{P}(V_d \geq v_d(1 - \varepsilon)) \propto \mathbb{E} \left( \left( \varepsilon - c_d T_d'^2 - \tilde{V}'_{d-1} \right)_+^{\frac{d+1}{2}} \right).$$

Par Fubini, si  $X \geq 0$  et  $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^\gamma$ , alors  $\mathbb{E}((\varepsilon - X)_+^\alpha) \sim c'\varepsilon^{\alpha+\gamma}$ .

Comme  $\mathbb{P}(T_d'^2 \leq \varepsilon) \sim c\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{P}(\tilde{V}'_{d-1} \leq \varepsilon) \sim c'\varepsilon^{\gamma_{d-1}}$ ,

$$\gamma_d = \gamma_{d-1} + \frac{d+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

# Plan

Une certaine géométrie aléatoire

Triangles et simplexes aléatoires

Polytopes aléatoires et leurs fluctuations

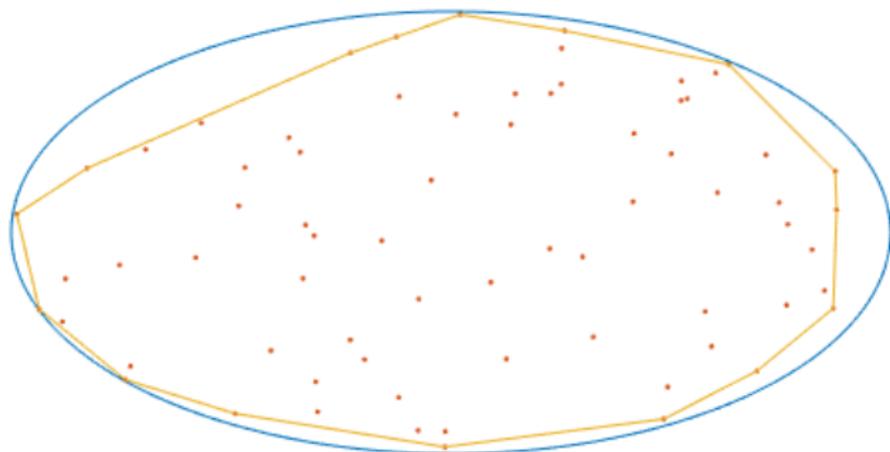
# Enveloppe convexe aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Comportement quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



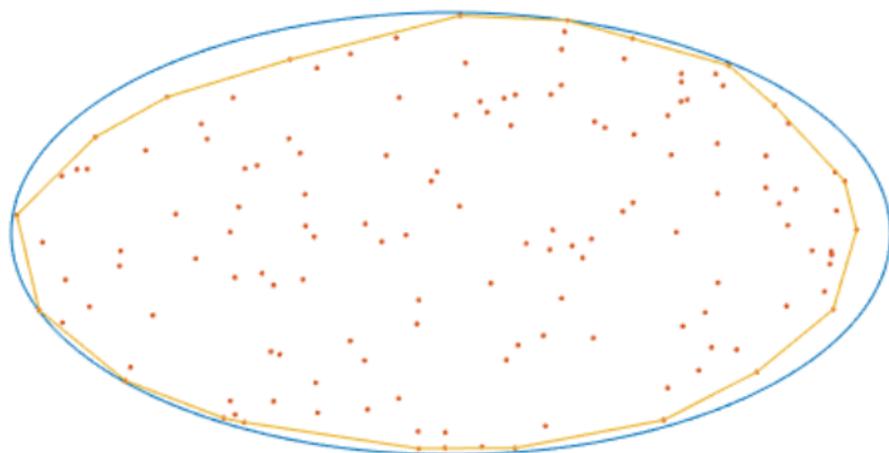
# Enveloppe convexe aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Comportement quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



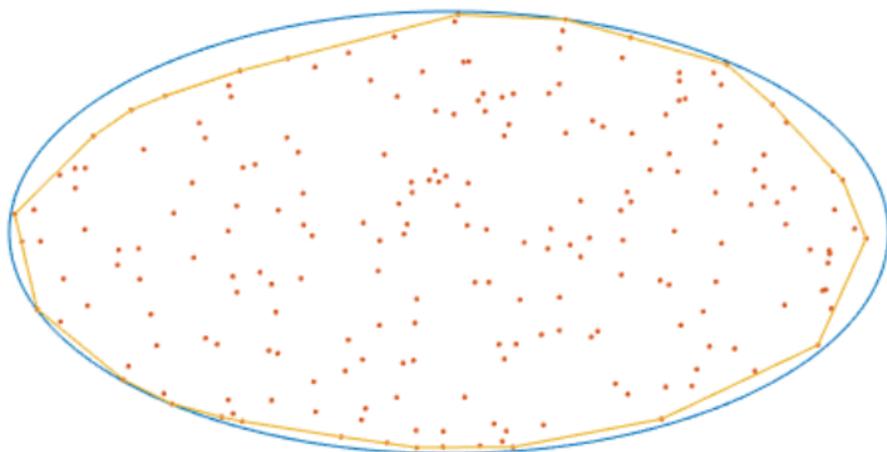
# Enveloppe convexe aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Comportement quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



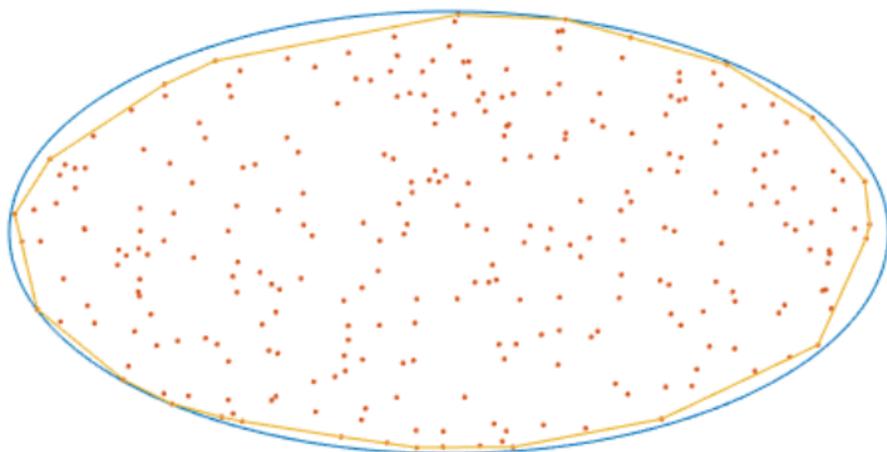
# Enveloppe convexe aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Comportement quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



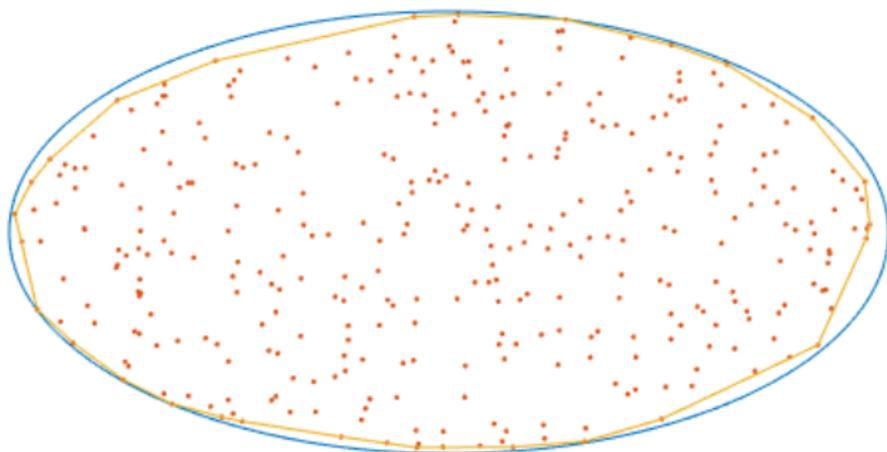
# Enveloppe convexe aléatoire

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Comportement quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



# Résultats non-asymptotiques connus

- ▶ Identités entre moyennes  $f_0(K_\lambda)$  := nombre de points extrémaux

$$\mathbb{E}f_0(K_\lambda) = \lambda \left( 1 - \frac{\mathbb{E}(\text{Vol}_d(K_\lambda))}{\text{Vol}_d(K)} \right)$$

Références. B. Efron (1965), C. Buchta (2005)

- ▶ Formules pour les moments  $K \in \mathbb{B}^d$ ,  $f_k(K_\lambda)$  := nombre de faces  $k$ -dimensionnelles

Référence. Z. Kabluchko (2021)

- ▶ Comparaison du volume défaut  $\text{Vol}_d(K \setminus K_\lambda)$  avec celui d'un corps déterministe, dit *corps flottant*

Références. I. Bárány et D. Larman (1988), I. Bárány, M. Fradélizi, X. Goaoc, A. Hubard, G. Rote (2020)

# Résultats asymptotiques connus

- ▶ Espérances limites et lois des grands nombres

$$\mathbb{E}(\text{Vol}_d(K \setminus K_\lambda)) \sim c_1(d, K)\lambda^{-\frac{2}{d+1}}, \quad \mathbb{E}(f_k(K_\lambda)) \sim c_2(d, K)\lambda^{\frac{d-1}{d+1}}$$

Références. Rényi & Sulanke (1963), Schneider & Wieacker (1980), Bárány (1989), Reitzner (2003)

- ▶ Variances limites et théorèmes centraux limites

$$\text{Var}(\text{Vol}_d(\tilde{K}_n)) \sim c_3(d, K)n^{-\frac{d+3}{d+1}}, \quad \text{Var}(f_k(\tilde{K}_n)) \sim c_4(d, K)n^{\frac{d-1}{d+1}}$$

Références. M. Reitzner (2005), T. Schreiber & J. Yukich (2008), travail avec J. Yukich (2014)

- ▶ Estimées de concentration

Références. Vu (2005), Grote & Thäle (2018)

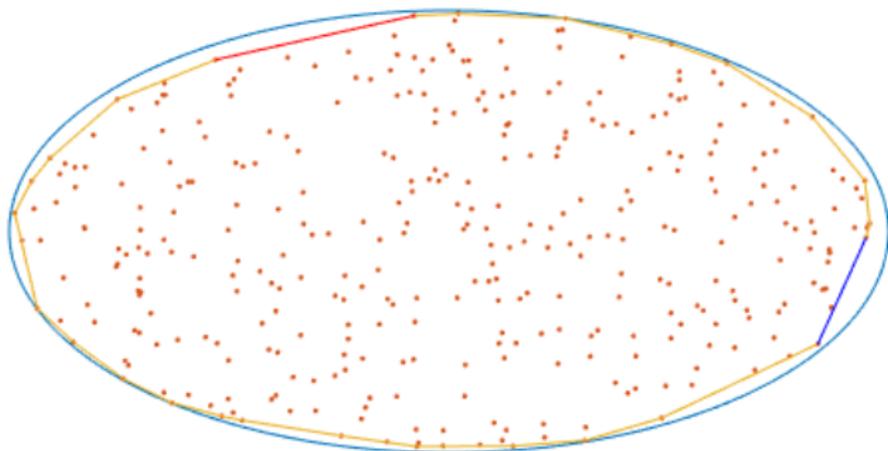
# Fluctuations maximales des enveloppes convexes aléatoires

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Fluctuations quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



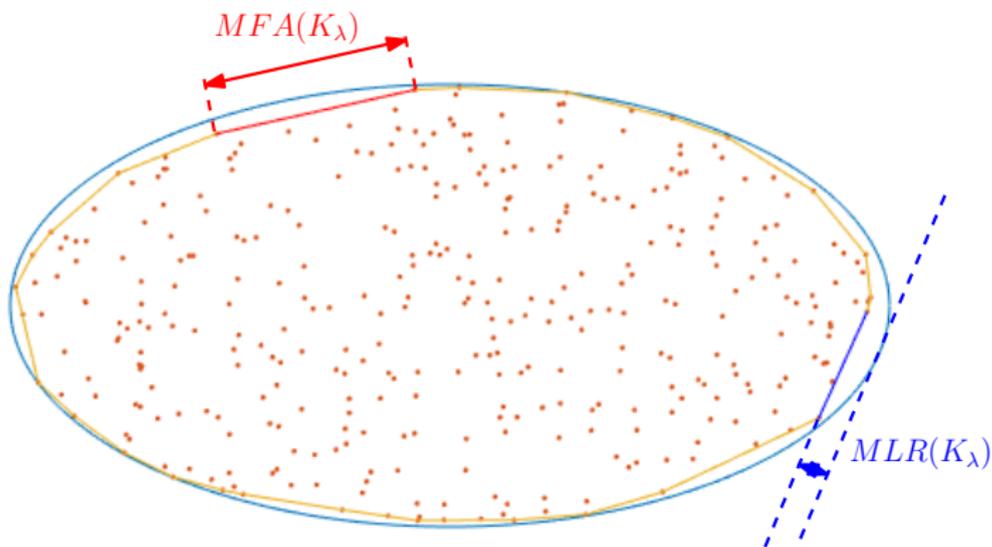
# Fluctuations maximales des enveloppes convexes aléatoires

$K$  corps convexe de  $\mathbb{R}^d$  à bord lisse

$N_\lambda$  variable de Poisson de moyenne  $\lambda V_d(K)$ ,  $\lambda > 0$

$K_\lambda$  enveloppe convexe de  $N_\lambda$  points i.i.d. uniformes dans  $K$

*Fluctuations quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*



# Convergence des fluctuations (résultats avec J. Yukich)

Références. Bárány (1989), Bräker, Hsing & Bingham (1998)

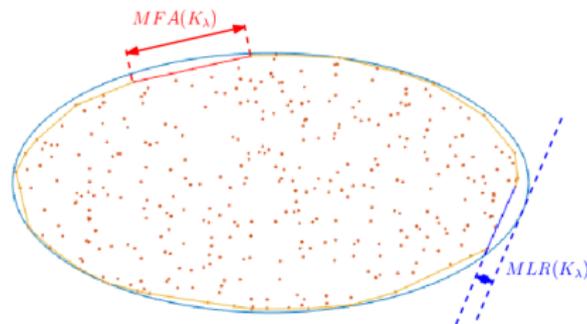
## Maximal local roughness

$$MLR(K_\lambda) = \lambda^{-\frac{2}{d+1}} (a_0(a_1 \log \lambda + a_2 \log(\log \lambda) + a_3 + \xi_\lambda))^{\frac{2}{d+1}}$$

## Maximal facet area

$$MFA(K_\lambda) = \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}} (b_0(b_1 \log \lambda + b_2 \log(\log \lambda) + b_3 + \psi_\lambda))^{\frac{d-1}{d+1}}$$

avec  $\mathbb{P}(\xi_\lambda \leq t)$  et  $\mathbb{P}(\psi_\lambda \leq t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}$  (loi de Gumbel)



# Convergence des fluctuations (résultats avec J. Yukich)

Références. Bárány (1989), Bräker, Hsing & Bingham (1998)

## Maximal local roughness

$$MLR(K_\lambda) = \lambda^{-\frac{2}{d+1}} (a_0(a_1 \log \lambda + a_2 \log(\log \lambda) + a_3 + \xi_\lambda))^{\frac{2}{d+1}}$$

## Maximal facet area

$$MFA(K_\lambda) = \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}} (b_0(b_1 \log \lambda + b_2 \log(\log \lambda) + b_3 + \psi_\lambda))^{\frac{d-1}{d+1}}$$

avec  $\mathbb{P}(\xi_\lambda \leq t)$  et  $\mathbb{P}(\psi_\lambda \leq t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}$  (loi de Gumbel)

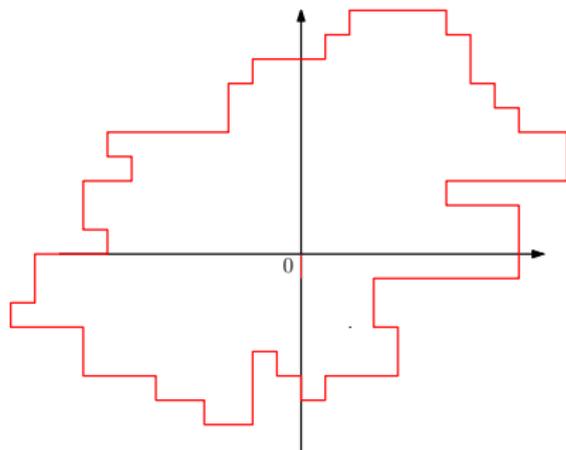
Quand  $d = 2$ ,

$$MLR(\lambda K_\lambda) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} (a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{and} \quad MFL(\lambda K_\lambda) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}} (b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}$$

L'interface  $\lambda \partial K_\lambda$  appartient à une *baby KPZ universality class*.

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

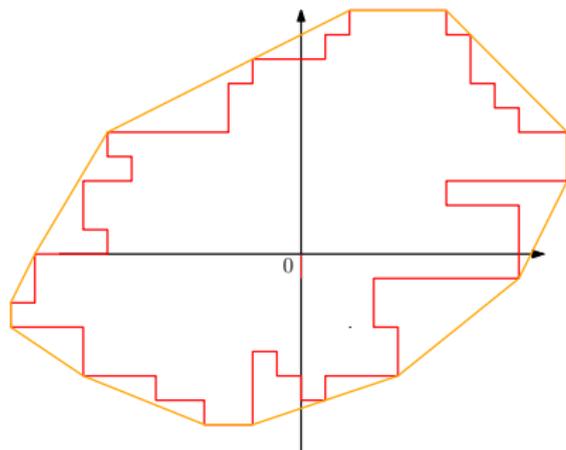
$$MLR(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} (a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}} (b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$



*Random cluster model* sous-critique : enveloppe du plus grand circuit ouvert contenant 0 et conditionné à contenir  $\lambda^2$  points

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

$$MLR(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}}(a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}}(b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

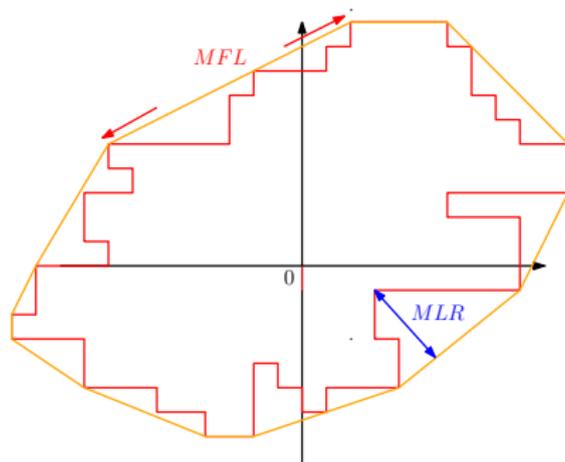


*Random cluster model* sous-critique : enveloppe du plus grand circuit ouvert contenant 0 et conditionné à contenir  $\lambda^2$  points

Référence. Hammond (2011)

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

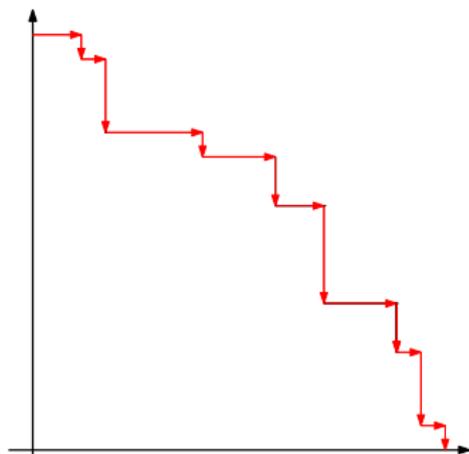
$$MLR(\cdot) \sim \mathbb{P} \lambda^{\frac{1}{3}} (a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \sim \mathbb{P} \lambda^{\frac{2}{3}} (b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$



*Random cluster model* sous-critique : enveloppe du plus grand circuit ouvert contenant 0 et conditionné à contenir  $\lambda^2$  points

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

$$MLR(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} (a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}} (b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

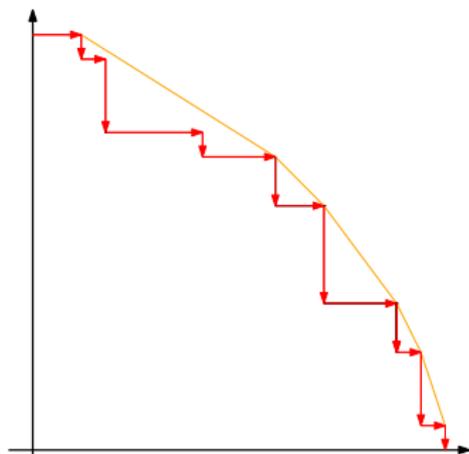


*Marche aléatoire orientée* dans le quadrant avec probabilité d'une trajectoire  $\propto \alpha^{\text{length}}$  et conditionnée à contenir une aire  $\lambda^2$

Référence. Hammond (2019)

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

$$MLR(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} (a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}} (b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

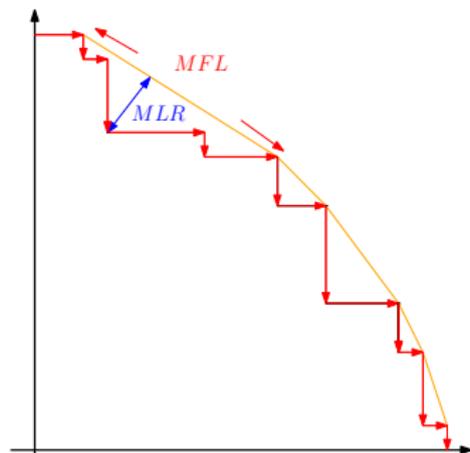


*Marche aléatoire orientée* dans le quadrant avec probabilité d'une trajectoire  $\propto \alpha^{\text{length}}$  et conditionnée à contenir une aire  $\lambda^2$

Référence. Hammond (2019)

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

$$MLR(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}}(a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}}(b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$

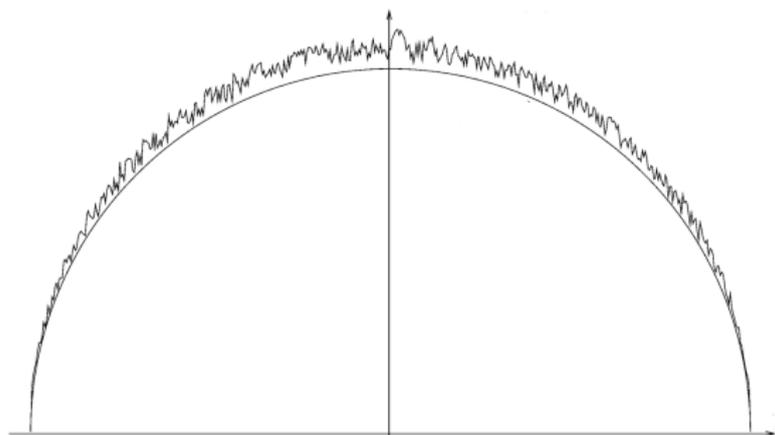


*Marche aléatoire orientée* dans le quadrant avec probabilité d'une trajectoire  $\propto \alpha^{\text{length}}$  et conditionnée à contenir une aire  $\lambda^2$

Référence. Hammond (2019)

# Interfaces croissantes aléatoires dans la classe *baby KPZ*

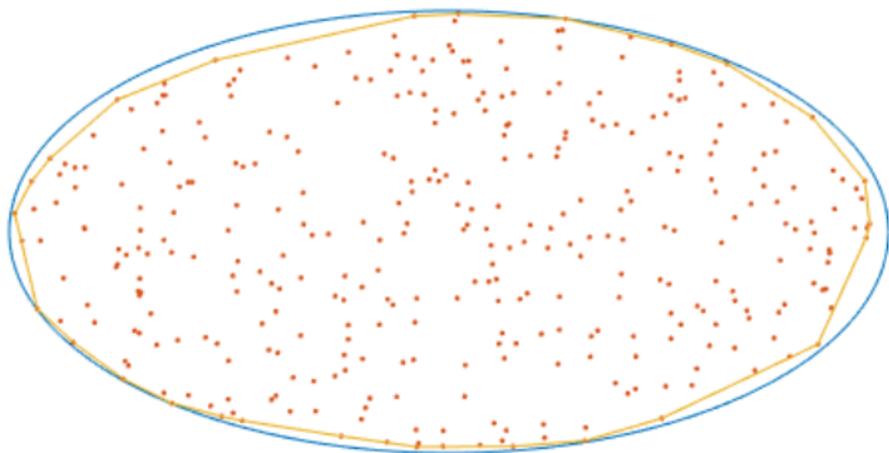
$$MLR(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{1}{3}} (a_0 a_1 \log \lambda)^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad MFL(\cdot) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \lambda^{\frac{2}{3}} (b_0 b_1 \log \lambda)^{\frac{1}{3}}.$$



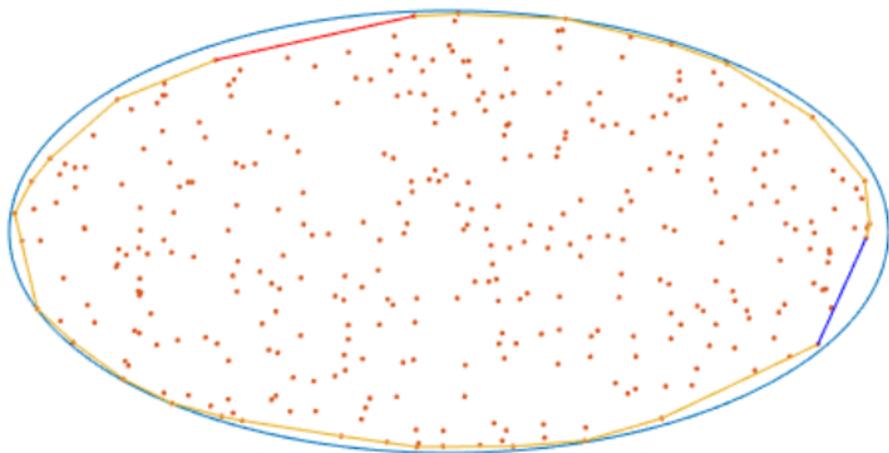
*Pont brownien* contraint à rester hors d'un demi-disque  
( $y \leq \sqrt{\lambda^2 - x^2}$ )

Référence. Ferrari & Spohn (2005)

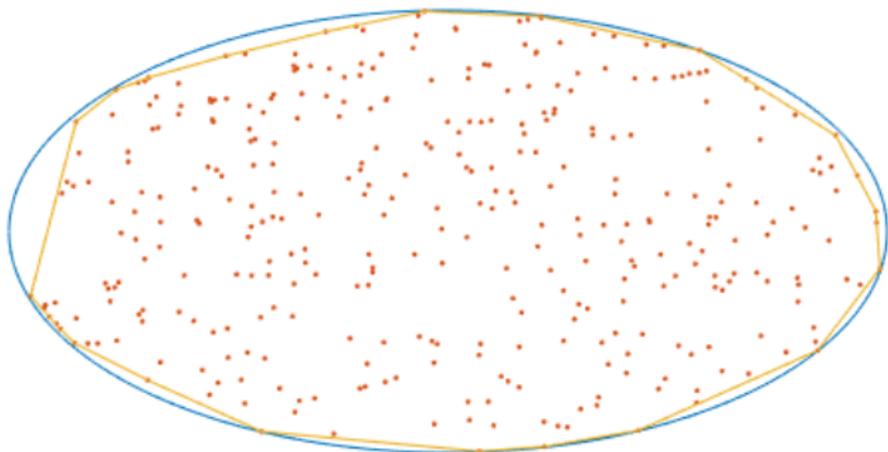
## Lieu de réalisation des 2 maxima



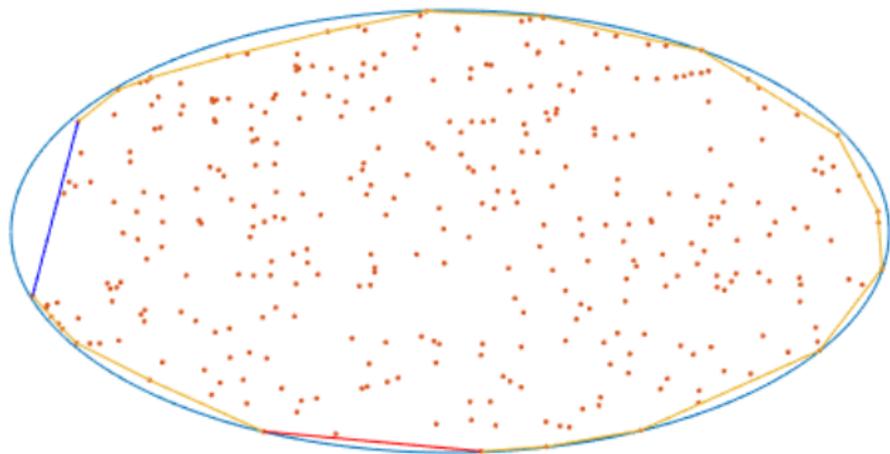
## Lieu de réalisation des 2 maxima



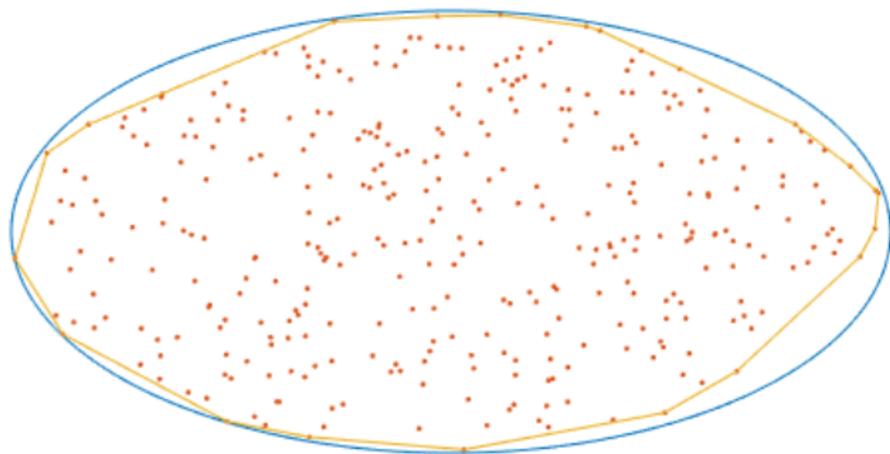
## Lieu de réalisation des 2 maxima



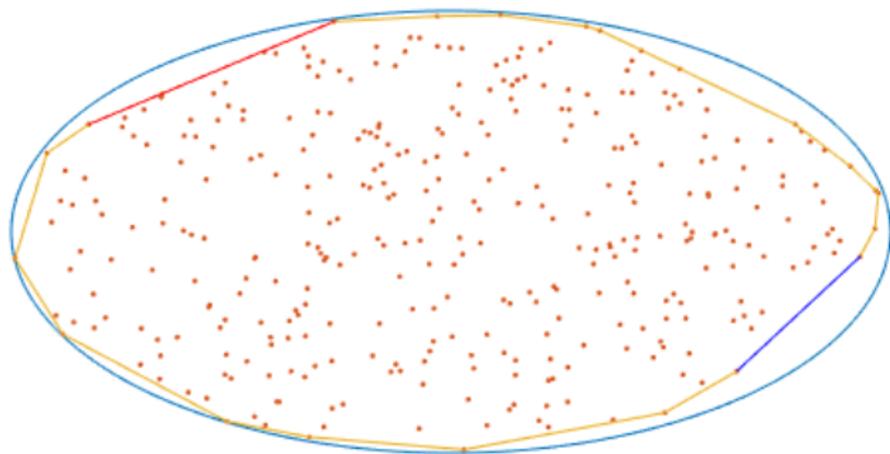
## Lieu de réalisation des 2 maxima



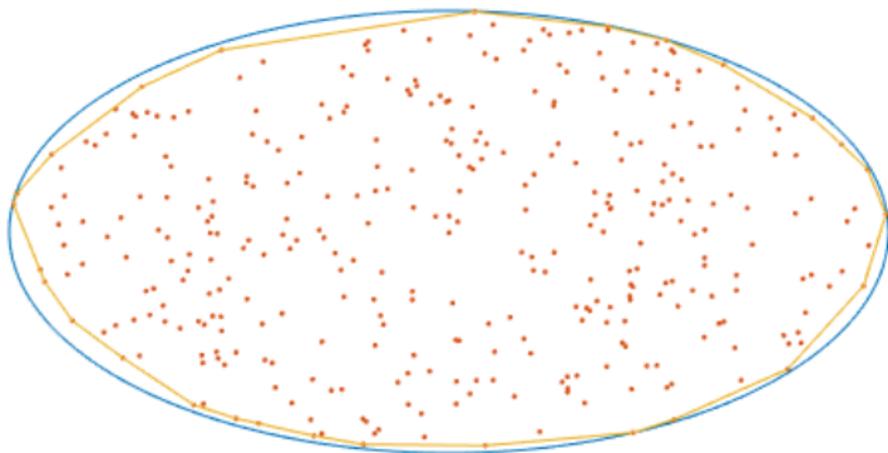
## Lieu de réalisation des 2 maxima



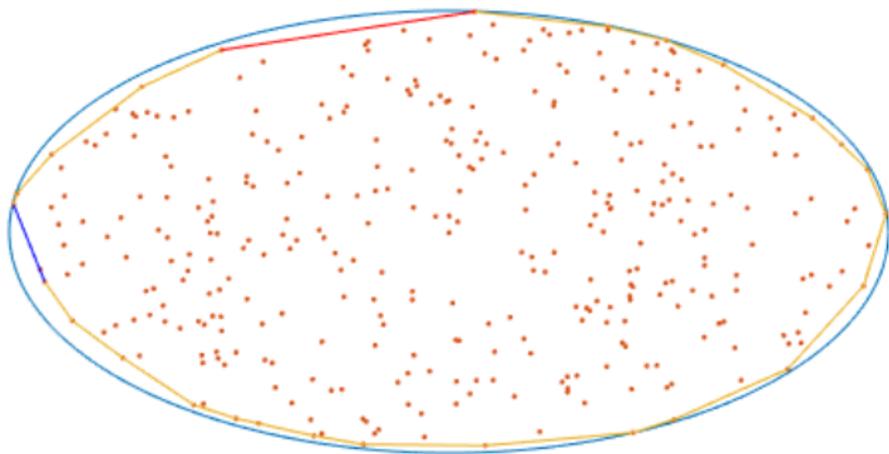
## Lieu de réalisation des 2 maxima



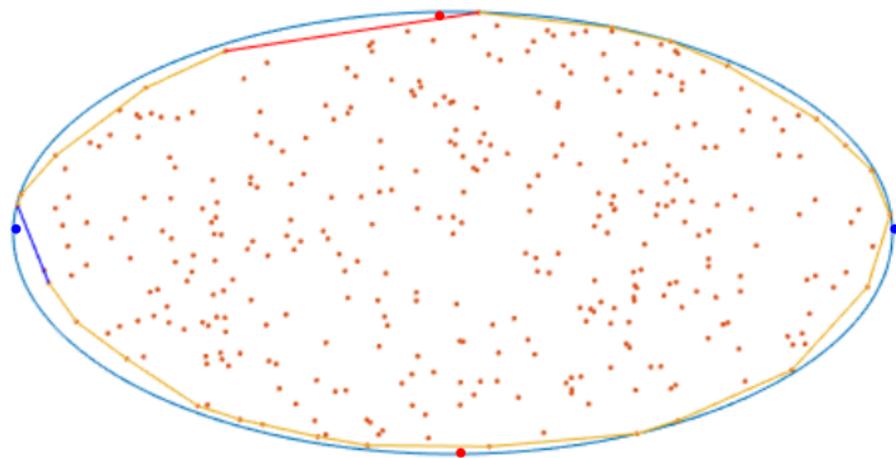
## Lieu de réalisation des 2 maxima



## Lieu de réalisation des 2 maxima



## Lieu de réalisation des 2 maxima

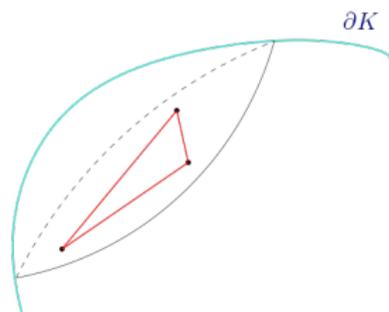
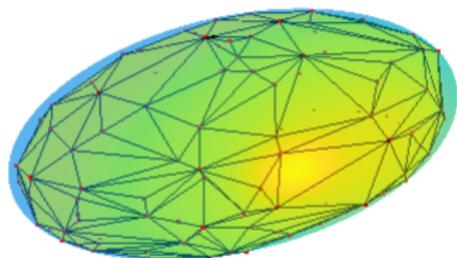


# Facette d'aire maximale

$\mathcal{F}_{\lambda, \max}$  facette dont l'aire est maximale

*Lieu et forme de  $\mathcal{F}_{\lambda, \max}$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*

La facette  $\mathcal{F}_{\lambda, \max}$  est un simplexe aléatoire inclus dans une section de  $K$  et dont la calotte associée est vide.

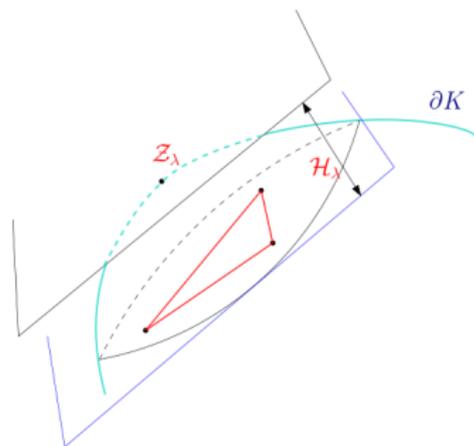
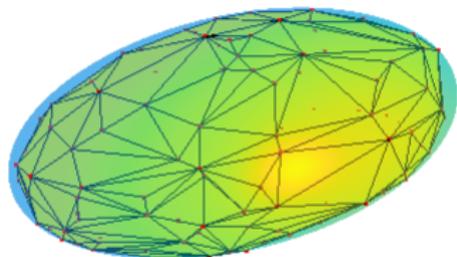


# Facette d'aire maximale

$\mathcal{F}_{\lambda, \max}$  facette dont l'aire est maximale

*Lieu et forme de  $\mathcal{F}_{\lambda, \max}$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$  ?*

La facette  $\mathcal{F}_{\lambda, \max}$  est un simplexe aléatoire inclus dans une section de  $K$  et dont la calotte associée est vide.



# Convergence de la position de $\mathcal{F}_{\lambda, \max}$

$$\kappa(\mathcal{Z}_\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\text{loi}} \min_{z \in \partial K} \kappa(z)$$

où  $\kappa(\cdot)$  courbure gaussienne de  $\partial K$ .

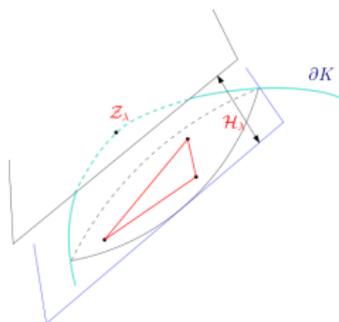
Si  $\text{Vol}_{d-1}(\text{argmin}(\kappa)) > 0$ ,

$$\mathcal{Z}_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\text{loi}} \text{Unif}(\text{argmin}(\kappa)).$$

Si  $\text{argmin}(\kappa) = \{z_1, \dots, z_k\}$ ,

$$\mathcal{Z}_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\text{loi}} \sum_{i=1}^k w_i \delta_{z_i}$$

où  $w_i \propto (\det(D^2\kappa|_{z_i}))^{-\frac{1}{2}}$ .

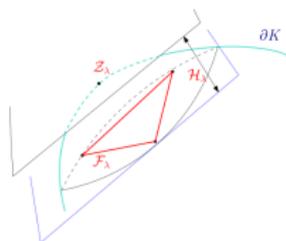


# Convergence de la forme de $\mathcal{F}_{\lambda, \max}$

Transformation affine  $T_\lambda$

$\mathcal{F}_{\lambda, \max} \subset$  section de  $K$  avec ellipsoïde osculateur

$T_\lambda$  envoie cet ellipsoïde sur  $\mathbb{B}^{d-1}$ .



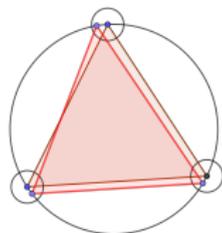
Distance  $\rho$  au simplexe régulier

$\mathcal{S}_i$  simplexe de sommets  $s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(d)}$ ,

$$\eta(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \max_k \min_l \|s_1^{(k)} - s_2^{(l)}\|$$

$B(c_1, r_1)$  boule circonscrite de  $\mathcal{S}_1$

$$\rho(\mathcal{S}_1) = \min\{\eta(r_1^{-1}(\mathcal{S}_1 - c_1), \mathcal{S}_{\text{reg}}) : \mathcal{S}_{\text{reg}} \text{ régulier} \subset \mathbb{B}^{d-1}\}$$



$$\forall \beta \in (0, \frac{1}{2}), \quad \mathbb{P}(\rho(T_\lambda(\mathcal{F}_{\lambda, \max})) \geq (\log \lambda)^{-\beta}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

# Convergence des fluctuations (résultats avec J. Yukich)

Références. Bárány (1989), Bräker, Hsing & Bingham (1998)

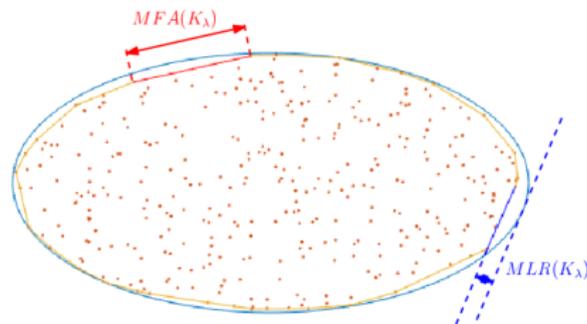
## Maximal local roughness

$$MLR(K_\lambda) = \lambda^{-\frac{2}{d+1}} (a_0(a_1 \log \lambda + a_2 \log(\log \lambda) + a_3 + \xi_\lambda))^{\frac{2}{d+1}}$$

## Maximal facet area

$$MFA(K_\lambda) = \lambda^{-\frac{d-1}{d+1}} (b_0(b_1 \log \lambda + b_2 \log(\log \lambda) + b_3 + \psi_\lambda))^{\frac{d-1}{d+1}}$$

avec  $\mathbb{P}(\xi_\lambda \leq t)$  et  $\mathbb{P}(\psi_\lambda \leq t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}$  (loi de Gumbel)



# Stratégie pour nos deux fluctuations extrêmes

- ▶ Requiert d'avoir une estimation de la queue de distribution des quantités  $d(\mathcal{F}_\lambda, \partial K)$  et  $\text{Vol}_{d-1}(\mathcal{F}_\lambda)$  à un seuil critique pour une seule facette  $\mathcal{F}_\lambda$  bien choisie (la facette *typique*).
- ▶ Nécessite ensuite de montrer une propriété d'indépendance asymptotique.
  - **Maximum des aires** : facettes asymptotiquement indépendantes
  - **Maximum des distances à la frontière** : des excédents par paquets  
↪ Autre stratégie, basée sur la *blocking method*

Référence. O'Brien (1987)

Merci pour votre attention !

